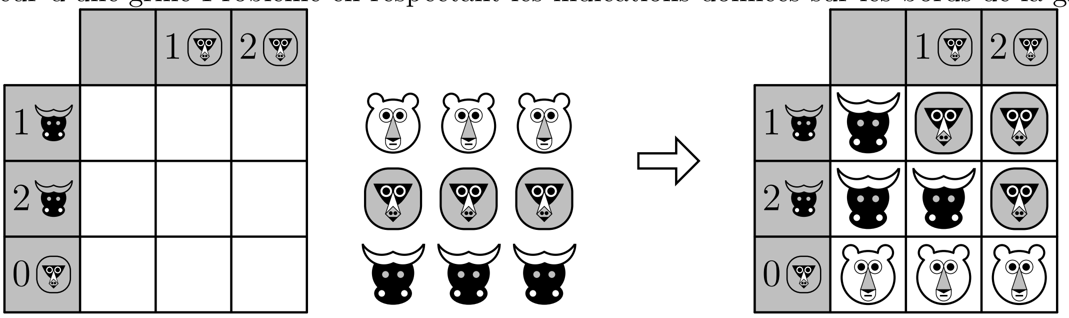
Jungle Logic (DJECO)

Exploration de quelques méthodes de raisonnement

Alain Brobecker, concepteur du jeu et professeur de Mathématiques, 2016/07/04
abrobecker@yahoo.com et *abrobecker.free.fr*

Description du jeu

Jungle Logic est un jeu de logique contenant 30 grilles Problème et 9 jetons animaux: 3 jetons Jaguar, 3 jetons Singe et 3 jetons Taureau. Le but est de placer les 9 jetons animaux dans les 9 cases blanches à l'intérieur d'une grille Problème en respectant les indications données sur les bords de la grille.



On peut résoudre les 30 grilles du jeu **Jungle Logic** de plusieurs manières:

- ▷ par essais/erreurs: on pose les jetons sur la grille, on modifie le placement si on voit des incompatibilités, puis on vérifie plus précisément si toutes les indications sont bien respectées
- ▷ par des raisonnement précis qui donnent une information certaine
- ▷ ou par un mélange de ces deux méthodes

Les jeunes enfants procèdent essentiellement par essais/erreurs, finissent rapidement leur première grille et montrent avec enthousiasme le résultat à l'adulte qui les encadre. Il est bon de prendre le temps de vérifier la grille, en demandant à l'enfant, pour chacune des lignes et chacune des colonnes, si l'indication est bien respectée. Si oui, il peut passer à la grille suivante, sinon on lui demande de chercher à nouveau.
Après avoir recommencé la grille ou en avoir fait une nouvelle, l'enfant n'hésite pas à solliciter à nouveau l'adulte pour la vérification. Très rapidement, au bout de 2 ou 3 grilles réussies, on peut demander à l'enfant de vérifier lui même chacune des indications avant de demander confirmation à l'adulte. Il aura ainsi gagné en autonomie.

Mais pour des joueurs plus âgés, **Jungle Logic permet la résolution de chaque grille en utilisant uniquement des raisonnements précis**, sans laisser aucune place à l'incertitude (voir annexe pour la justification). C'est ce qui est appelé la variante pour experts dans la règle, et c'est celle qui permet une grande variété de raisonnements logiques, que nous allons explorer dans ce petit document. Certains de ces raisonnements, comme le raisonnement par l'absurde ou la complémentarité, se rencontrent fréquemment dans des démonstrations Mathématiques. Il me semble intéressant de les découvrir dans le jeu Jungle Logic. Pris indépendamment ces raisonnements sont assez simples, leur imbrication peut mener, je l'espère, à de jolis problèmes.

Utilisation à la maison, utilisation en classe

Partie en cours de rédaction

Vous devez placer exactement trois △, trois □ et trois ♡ dans la zone blanche de la grille. Sur la partie grisée on a indiqué le **nombre exact d'apparitions** d'un symbole sur cette ligne (ou colonne). A l'aide des informations déjà présentes, complétez la grille. Chaque grille ne possède qu'une solution.

		1□	2□
1♡			
2♡			
0□			

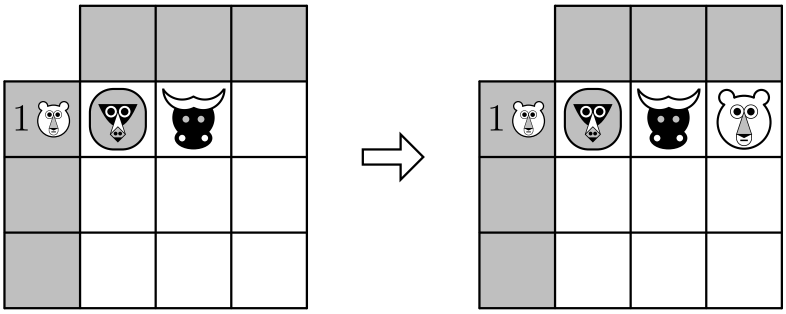
	2□	2△	0□
2△			
1△			
2♡			

	2△	1♡	1□
0□			
1□		♡	
1♡			

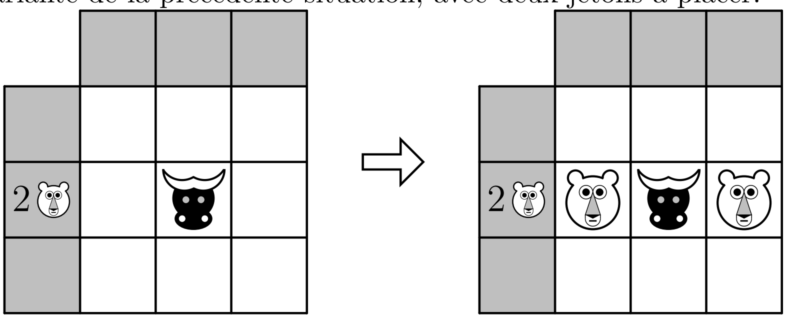
	0△	2♡	2△
1△			
2□			
0□		♡	

Description des raisonnements utilisés

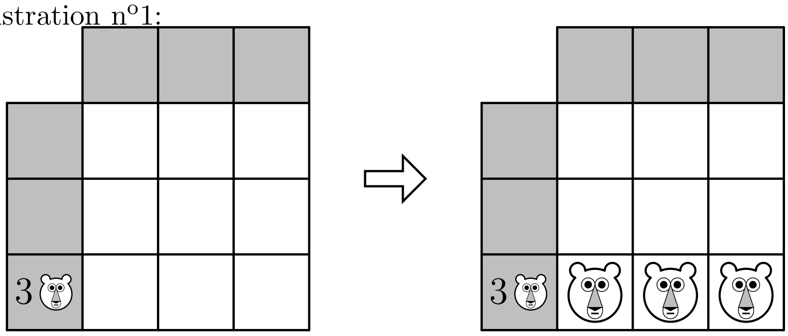
1) Le nombre d'emplacements libres est égal au nombre de pièces d'un certain type à poser
C'est le raisonnement de base du jeu, que les joueurs utilisent de manière naturelle. On le retrouve par exemple répété trois fois, de manière simple, dans la résolution de la grille n°1 du jeu, ou cinq fois dans la résolution de la grille de démonstration n°1. Voici une première situation qui peut être résolue avec ce raisonnement:



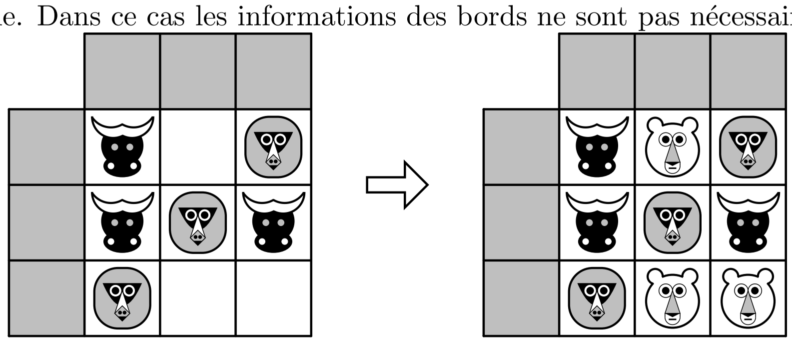
Une variante de la précédente situation, avec deux jetons à placer:



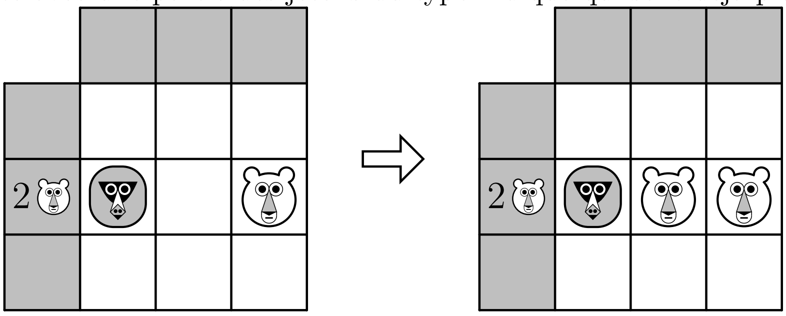
Et enfin le cas ou il faut placer 3 jetons sur la ligne. Cette situation ne se présente jamais directement dans les grilles proposées du jeu, mais peut survenir au cours de la résolution, comme dans la grille de démonstration n°1:



On utilise aussi ce raisonnement de base lorsqu'il ne reste plus qu'un seul type de jetons à placer dans toute la grille. Dans ce cas les informations des bords ne sont pas nécessaires:

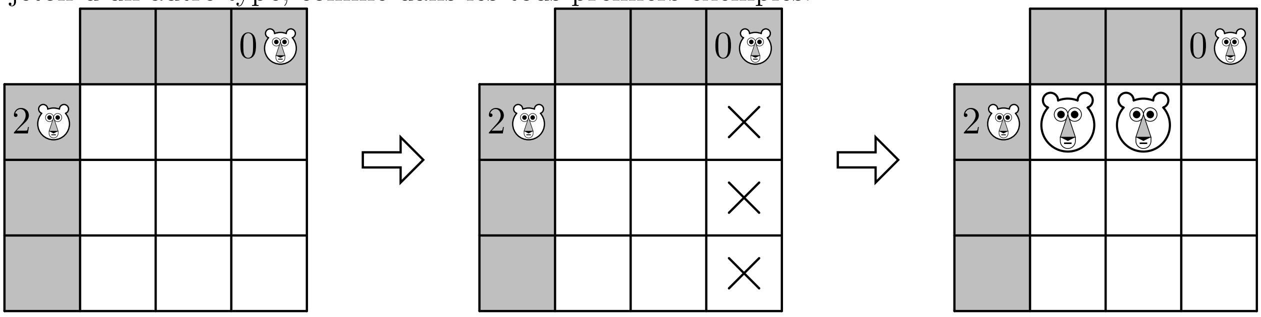


Variante avec une partie des jetons du type indiqué qui sont déjà placés:

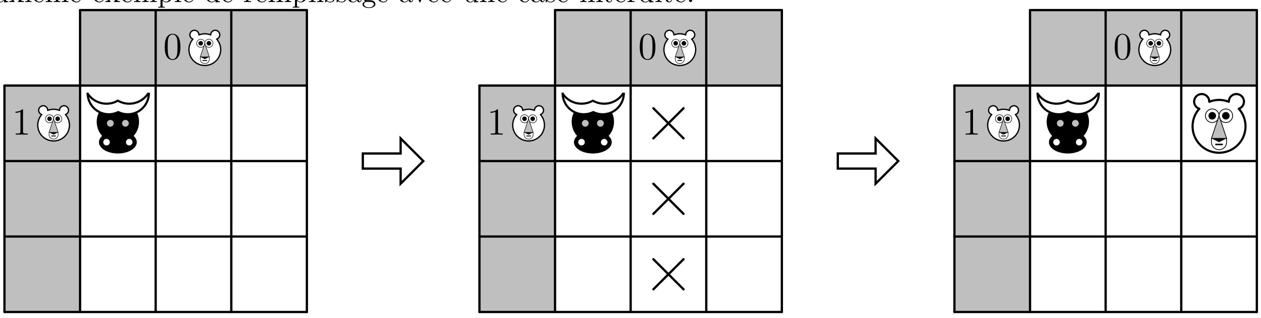


2) Cases interdites

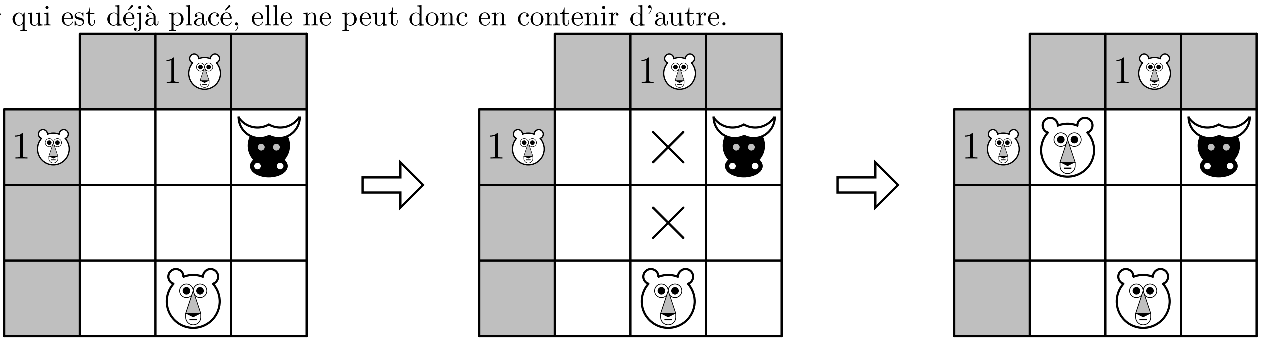
Lorsqu'une ligne ou une colonne contient la mention 0 jetons d'un certain type, cela donne alors des **cases interdites** pour les jetons de ce type. C'est une interdiction aussi absolue que si la case était déjà occupée par un jeton d'un autre type, comme dans les tous premiers exemples.



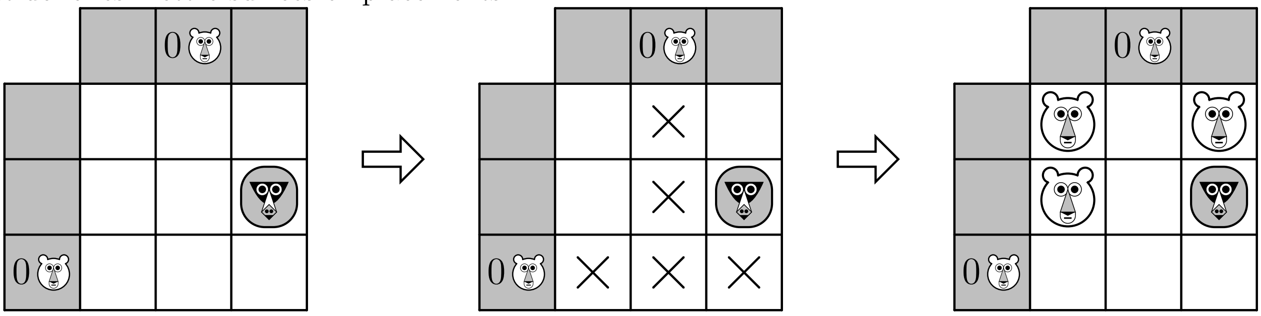
Un deuxième exemple de remplissage avec une case interdite:



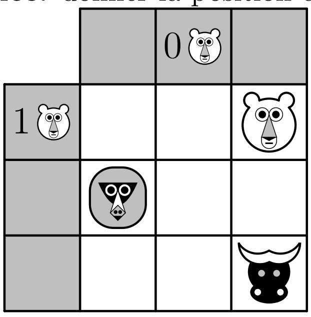
Parfois la case interdite est un peu plus subtile à découvrir: ici la deuxième colonne doit contenir un jeton Jaguar qui est déjà placé, elle ne peut donc en contenir d'autre.



La grille ci-dessous mélange raisonnement sur la grille entière, sur le nombre total de jetons et cases interdites: on commence par noter que certaines cases sont inaccessibles au jetons Jaguar, mais il ne reste alors que 3 cases accessibles au jetons Jaguar, c'est exactement le nombre de jetons Jaguar qu'il reste à placer, on peut donc les mettre sur ces emplacements.



Exercice: donner la position des trois jetons Jaguar dans la grille ci-dessous:



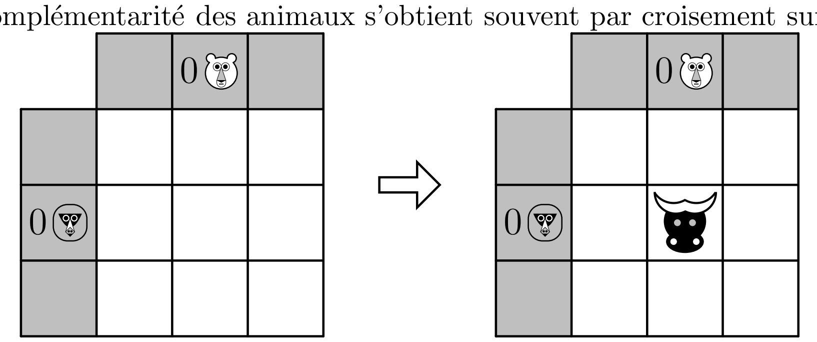
3) Principe de complémentarité

En Mathématiques, le complémentaire d'un ensemble donné est lui même un ensemble qui contient toutes les possibilités sauf celle de l'ensemble donné au départ. Par exemple pour les nombre entiers, les nombres pairs et les nombres impairs sont deux ensembles complémentaires.

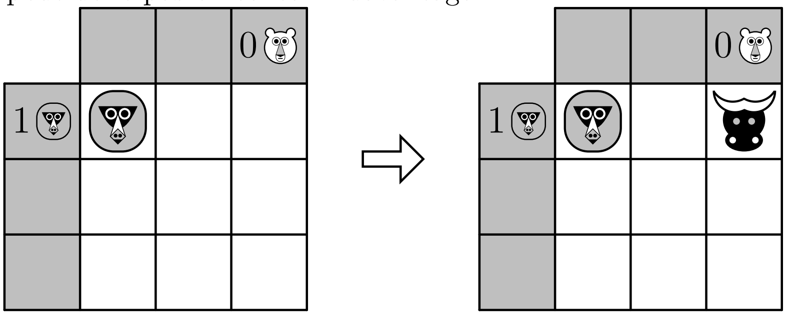
Le jeu Jungle Logic ne contient que 3 types d'animaux, le principe de complémentarité devient ici: Si une case ne peut pas contenir certains types d'animaux, elle doit contenir les autres types. Par exemple si une case ne peut pas contenir de jeton Jaguar ni de jeton Singe, elle doit contenir un jeton Taureau.

Ce raisonnement est suffisamment inhabituel ou suffisamment caché pour qu'une grande partie des joueurs n'y ait pas recours: La grille n^{o}2 du jeu a été conçue pour être très facilement soluble avec ce raisonnement, mais lors des nombreuses présentations du jeu, j'ai découvert que beaucoup de joueurs résolvaient cette grille avec des raisonnements différents (par exemple en trouvant les 3 seules cases disponibles pour le jetons Singe sur la grille à l'aide des cases interdites).

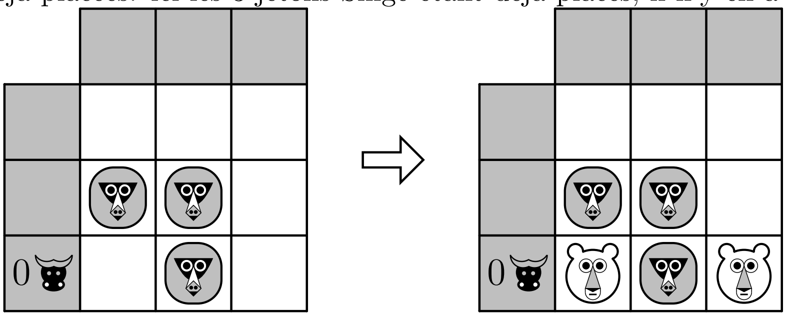
La complémentarité des animaux s'obtient souvent par croisement sur les lignes et les colonnes:



Voici une variante de la complémentarité avec une interdiction un peu plus subtile à découvrir, mais toujours avec un croisement sur les lignes et les colonnes: la rangée doit contenir un jeton Singe qui est déjà placé, elle ne peut donc pas en contenir davantage.



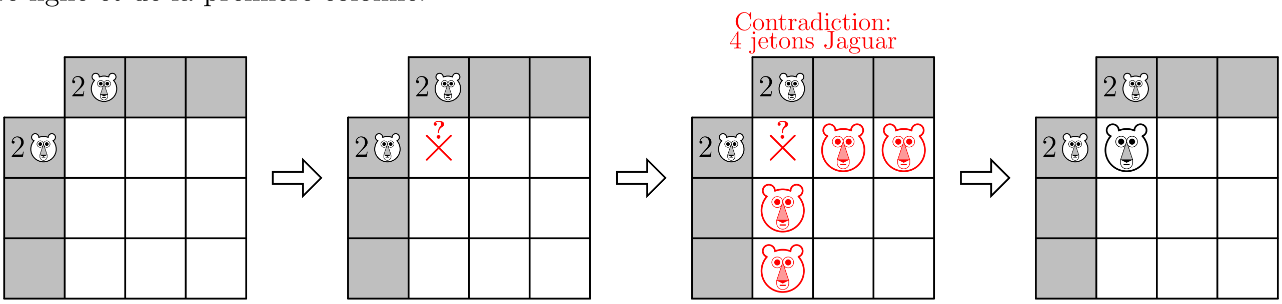
Mais l'interdiction, et donc la complémentarité, peut aussi s'obtenir lorque toutes les pièces d'un même type sont déjà placées: ici les 3 jetons Singe étant déjà placés, il n'y en a plus d'autres dans la grille.



Exercice: Résoudre la grille 2 en utilisant six fois le principe de complémentarité.

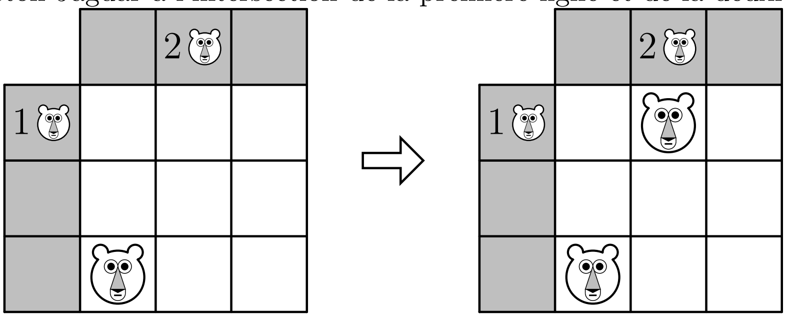
4) Croisement de valeurs obligatoires (raisonnement par l'absurde)

En croisant les informations données sur les lignes et les colonnes, ont peut dans certains cas trouver la pièce à placer sur une case. La justification se fait en utilisant un **raisonnement par l'absurde**: Sur l'exemple ci-dessous, nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a pas de jeton Jaguar à l'intersection de la première ligne et de la première colonne. Mais nous avons alors besoin de 4 jetons Jaguar pour remplir cette ligne et cette colonne (raisonnement 1), or nous n'en avons que 3 dans le jeu, nous aboutissons donc à une contradiction et notre hypothèse de départ est donc fausse. Par conséquent il y a un jeton Jaguar à l'intersection de la première ligne et de la première colonne.

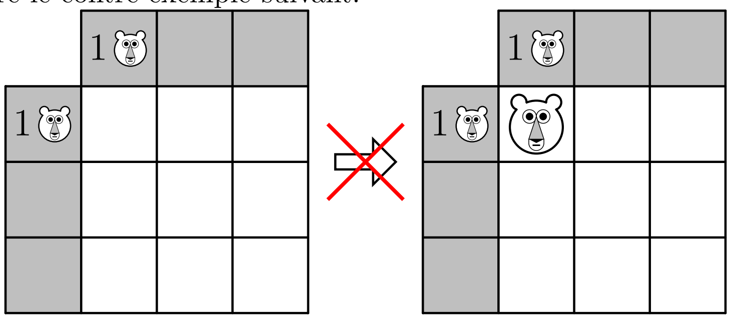


Si des jetons sont déjà placés sur la grille, on a recours au théorème général suivant (qui peut se démontrer par l'absurde comme ci-dessus): **Si, pour un animal donné, la somme des jetons restant à placer sur une rangée et des jetons restant à placer sur une colonne est supérieure au nombre total de jetons restant à placer, alors il y a un jeton à l'intersection de cette rangée et de cette colonne**.

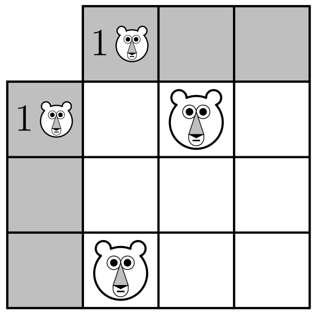
La grille ci-dessous contient déjà un jeton Jaguar, il reste donc 2 jetons Jaguar à placer. La première ligne doit encore contenir 1 jeton Jaguar et la deuxième colonne 2 jetons Jaguar. Comme $1 + 2 = 3 > 2$ alors il y a un jeton Jaguar à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne.



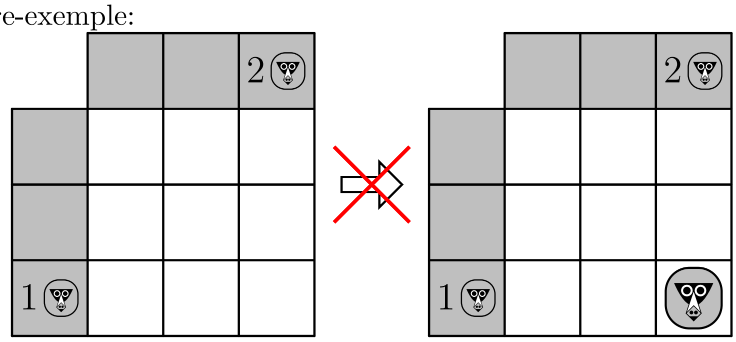
Ce théorème est valable pour toutes les grilles de Jungle Logic et dans d'autre situations de tableaux à double entrée. Toutefois il faut faire attention à ne pas généraliser abusivement! Un raisonnement incorrect, rencontré suffisamment souvent pour être signalé, consiste à dire qu'à l'intersection d'une ligne et d'une colonne devant contenir chacune 1 jeton Jaguar il y a un jeton Jaguar. Ce n'est pas obligatoire comme le montre le contre-exemple suivant:



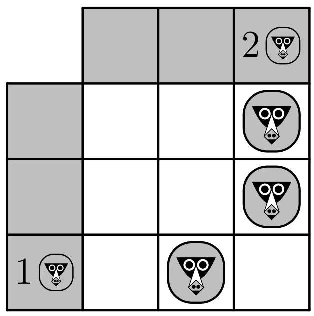
car on pourrait
aussi avoir,
par exemple:



La même remarque s'applique dans le cas d'une ligne devant contenir 2 jetons Singe et d'une colonne devant contenir 1 jeton Singe, l'intersection ne contient pas forcément un jeton Singe, comme dans ce deuxième contre-exemple:



car on pourrait
aussi avoir,
par exemple:



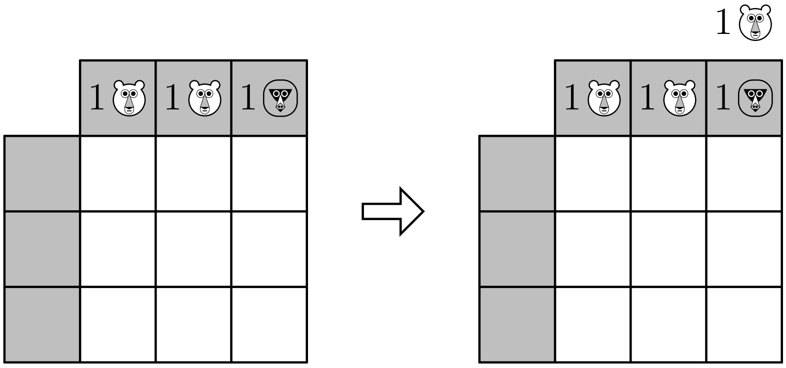
Ayant noté que ce raisonnement incorrect était utilisé par certains joueurs, mais comme il n'aboutit pas systématiquement à une erreur, je me suis permis d'inclure spécifiquement des grilles dans lesquels il mène à une impossibilité: il s'agit des grilles 11; 15; 16; 19; 21; 22; 24. Enfin dans la grille 17 ce raisonnement incorrect est possible deux fois, mais il n'aboutit à une impossibilité que dans un des deux cas.

Remarque: Le **raisonnement par l'absurde** est une forme d'essai/erreur, mais avec une seule hypothèse ayant seulement deux possibilités (Vrai ou Faux), ce qui permet à l'issue de notre essai d'avoir une **information négative certaine**. Si il y a plus d'une hypothèse ou plus de deux possibilités, on dit que l'on fait une **disjonction de cas** en testant toutes les possibiltés les unes après les autres et en éliminant celles aboutissant à une contradiction. Le raisonnement par l'absurde est donc une disjonction de cas avec seulement deux cas.
Précisons enfin que les disjonctions de cas peuvent être menées de manière rigoureuse, mais c'est rapidement laborieux pour les humains lorsque le nombre de paramètres augmente: Par exemple avec 2 hypothèses ayant chacune 3 possibilités, on aurait une disjonction de cas avec $2^3 = 8$ situations à étudier pour éliminer celles qui sont incorrectes.

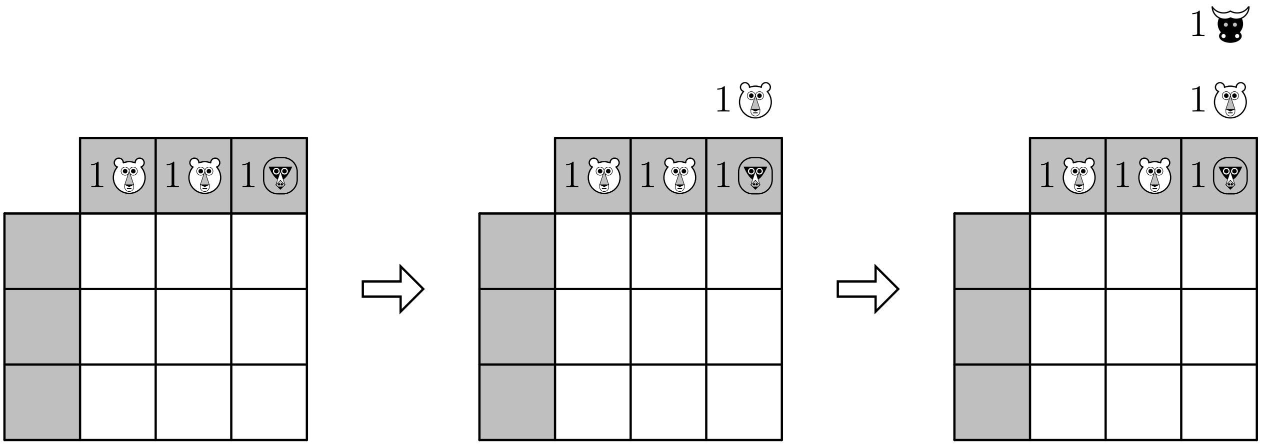
4) Raisonnement sur les bords

Les indications données sur les bords de la grille ne permettent pas toujours de résoudre directement la grille. Mais elles peuvent nous permettre de trouver d'autres indications utiles.
Une technique très efficace consiste à choisir soit le bord gauche, soit le bord haut de la grille, à placer les jetons indiqués sur la colonne appropriée, puis a regarder si cela nous permet de déduire la position d'autres jetons.

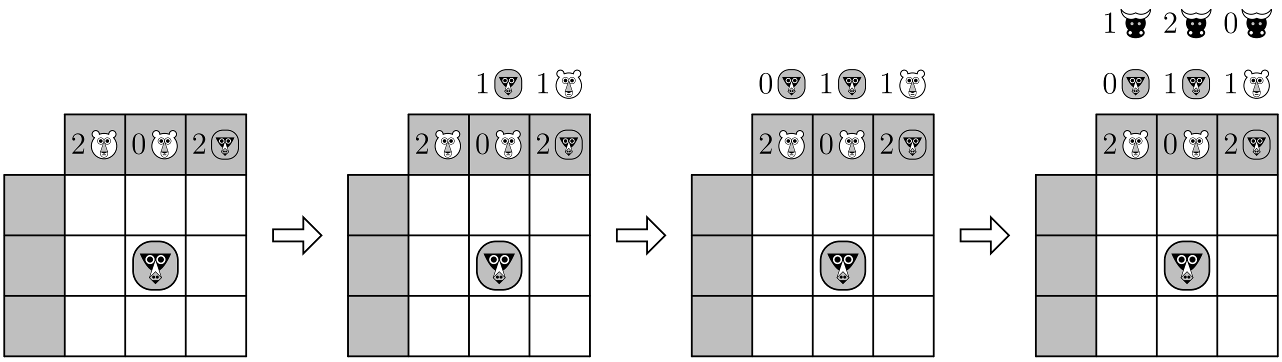
Dans l'exemple ci-dessous la première colonne contiendra exactement un jeton Jaguar, la deuxième colonne contiendra exactement un jeton Jaguar, donc le dernier jeton Jaguar ne peut se trouver que sur la troisième colonne.



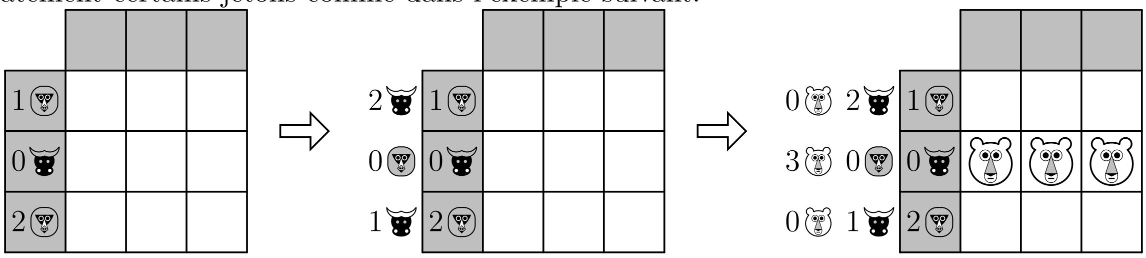
Mais, toujours sur le même exemple, un nouveau type de raisonnement est maintenant possible: on sait que la dernière colonne contiendra exactement 1 jeton Jaguar et exactement 1 jeton Singe sur un total de 3 jetons. Cela nous permet de déduire que le dernier jeton de cette colonne est un jeton Taureau.



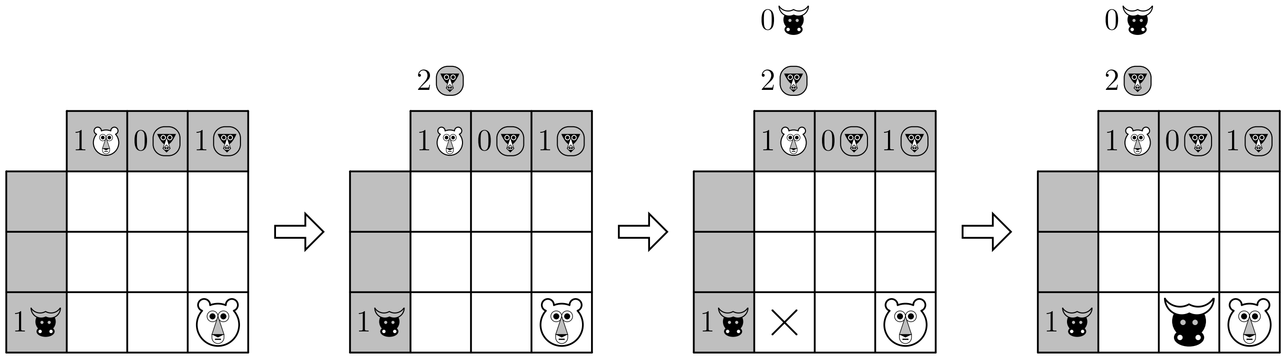
Ces deux raisonnements combinés nous permettent parfois de trouver toutes les répartitions des jetons sur un bord:



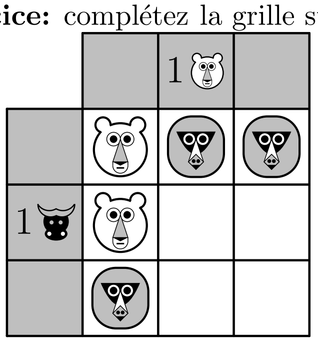
Connaitre précisément la répartition des jetons sur une ligne ou une colonne peut permettre de placer immédiatement certains jetons comme dans l'exemple suivant:



Connaitre précisément la répartition des jetons sur une ligne ou une colonne peut aussi permettre de trouver des cases interdites pour un type de jetons. Sur l'exemple ci-dessous, le Taureau de la dernière ligne ne pourra pas se trouver sur la première colonne, ce qui nous donne finalement sa position:

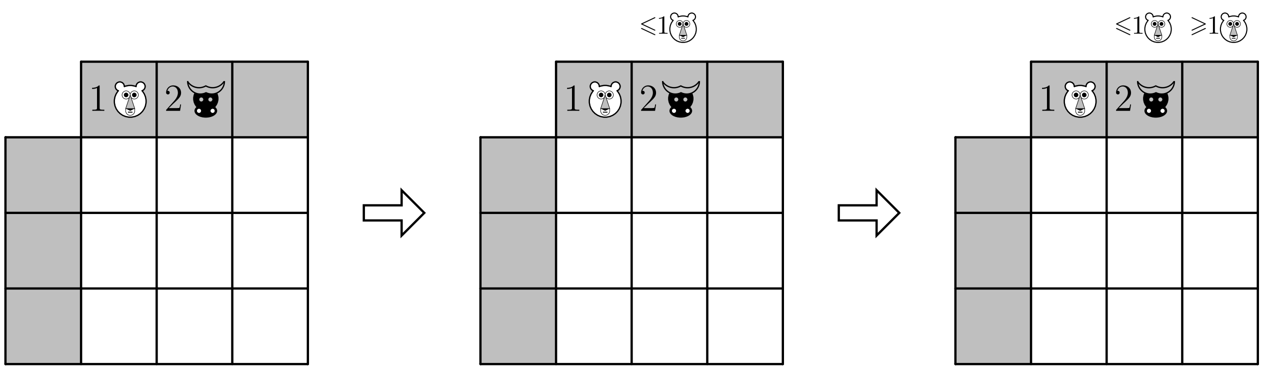


Exercice: complétez la grille suivante:



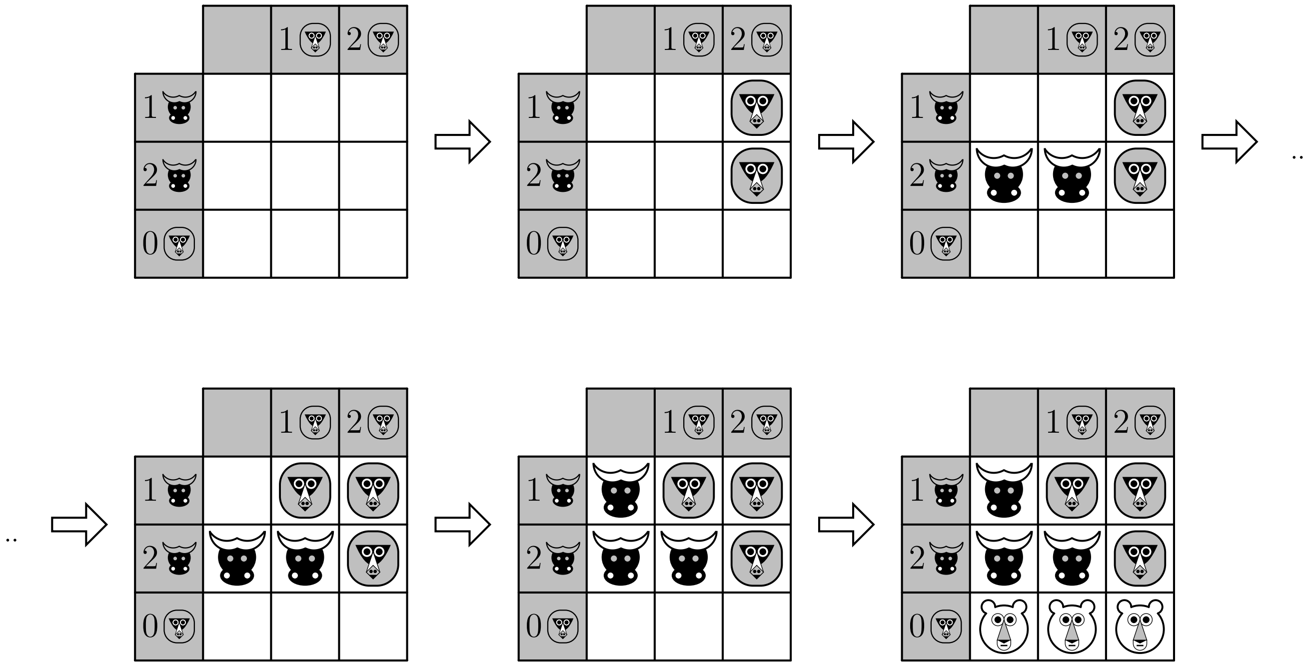
6) Raisonnement sur les valeurs mininum et maximum dans une ligne

Les raisonnements exacts sur les bords ne sont pas toujours possibles. Parfois une information partielle peut quand même être obtenue. Dans l'exemple ci-dessous, le fait qu'il n'y ait qu'une case disponible dans la deuxième colonne implique qu'il y aura au plus un jeton Jaguar dedans. Il en découle que la dernière colonne contiendra au moins un jeton Jaguar pour arriver au total de 3 jetons Jaguar dans la grille.

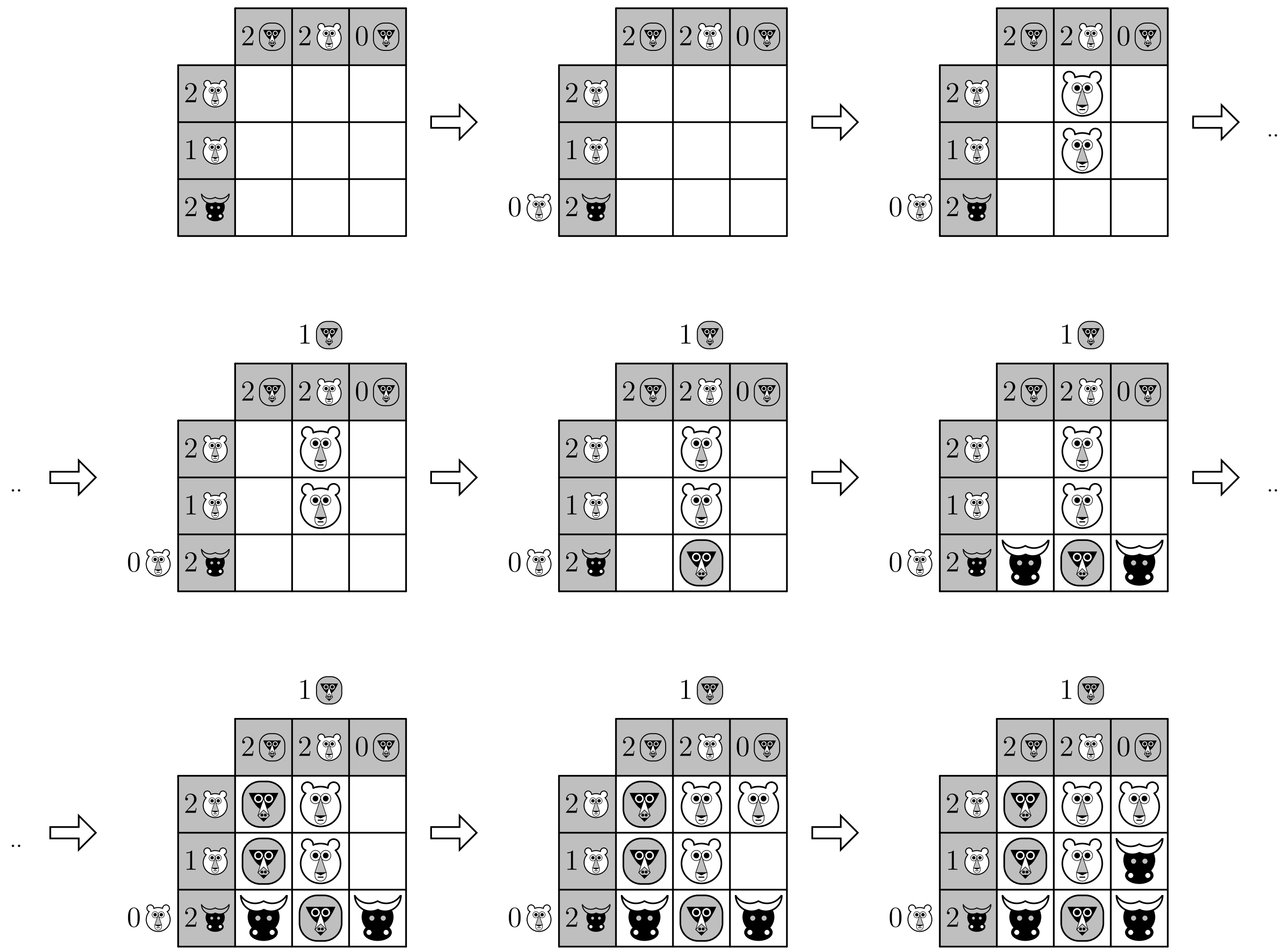


Annexe: Résolution détaillée des 4 grilles de démonstration

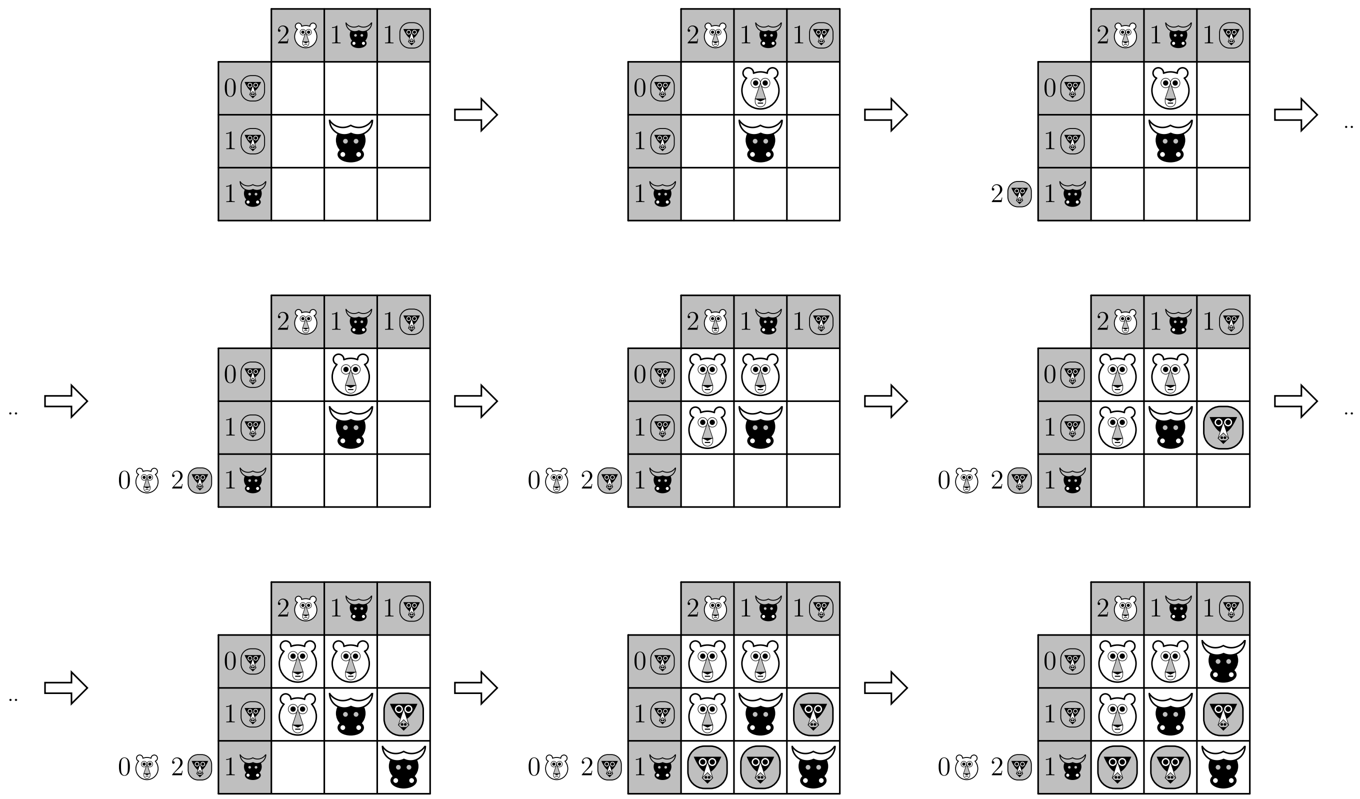
Résolution détaillée de la grille de démonstration n^{o}1



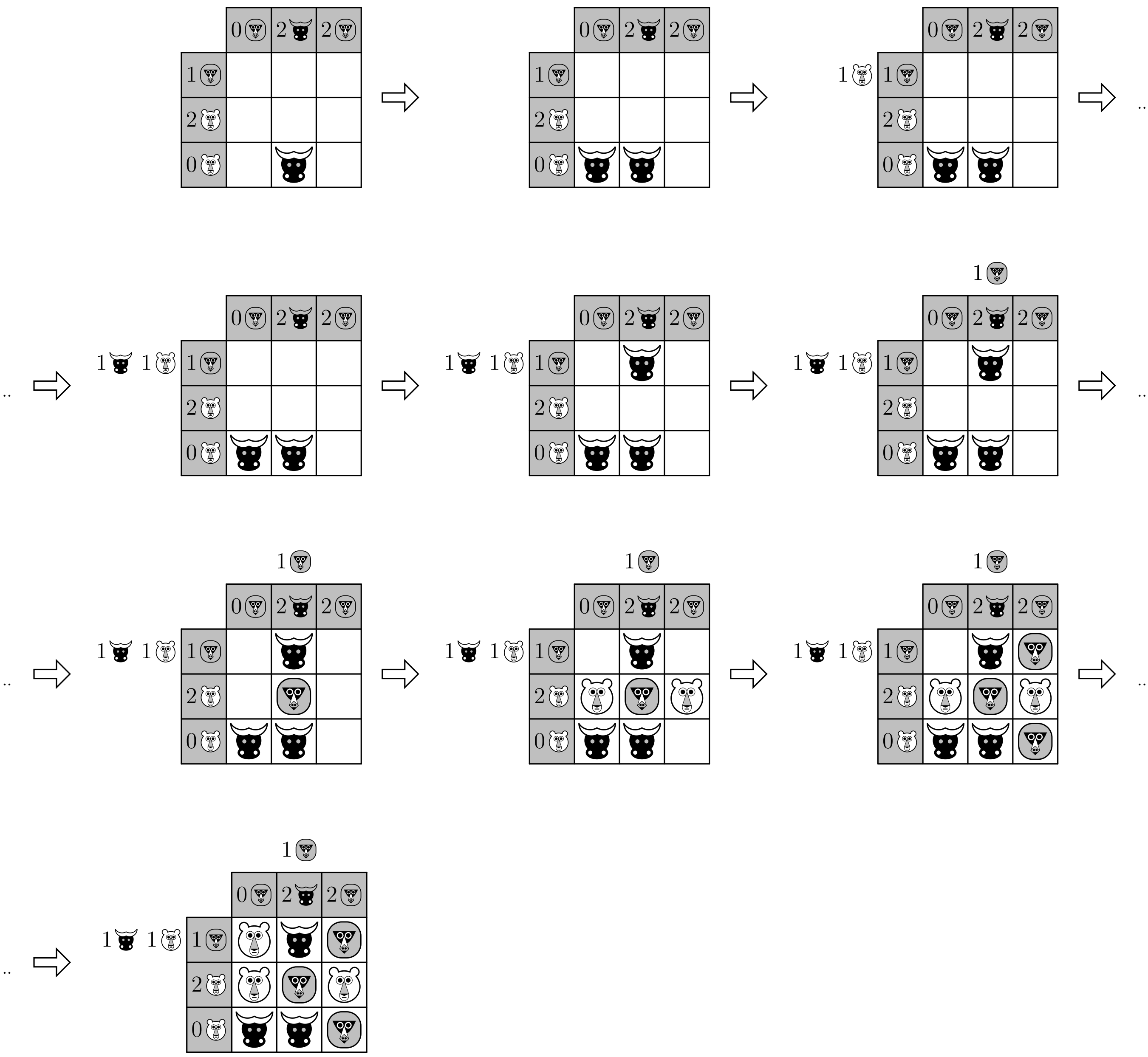
Résolution détaillée de la grille de démonstration n°2



Résolution détaillée de la grille de démonstration n°3



Résolution détaillée de la grille de démonstration n°4



Annexe: création des grilles, estimation du niveau de difficulté

Les premières grilles de ce jeu ont été créées à la main, pour voir si le concept fonctionnait.

Ensuite, j'ai écrit un programme informatique qui, pour chacune des 1680 dispositions possibles des jetons à l'intérieur de la grille, choisissait une ou zéro information pour chaque ligne et chaque colonne, puis vérifiait si cet ensemble de données était compatible avec une seule des 1680 dispositions. Si oui l'ensemble de données était un problème valide. J'avais alors plusieurs centaines de problèmes donnés par le programme. Pour savoir quels étaient les problèmes intéressants, et surtout s'ils pouvaient être résolus par des raisonnements rigoureux, j'ai analysé toutes les méthodes auxquelles je pensais pour résoudre une grille. J'ai écrit un deuxième programme informatique chargé de résoudre les problèmes trouvés en utilisant les 10 micro-raisonnements auxquels j'ai pensé. Cela m'a permis de vérifier que tous les problèmes étaient bien soluble avec des raisonnements. Enfin j'ai trié les raisonnements par classe de difficulté, et par un système qui permettait d'autoriser ou non les micro-raisonnements, j'ai pu savoir quels problèmes nécessitaient des raisonnements "difficiles" pour être résolus, et cela m'a aidé dans le choix des grilles parmi plusieurs centaines.
Toutefois, estimer la difficulté d'une grille n'est pas chose aisée. Cette impression de difficulté peut varier d'un joueur à l'autre. J'ai même noté, puisque j'ai résolu de nombreuses fois les grilles du jeu en me chronométrant, que d'une séance à l'autre ce n'étaient pas les mêmes grilles qui me ralentissaient: cela devait dépendre des informations auxquelles je commencais à réfléchir. J'ai donc classé les grilles par ordre de difficulté croissante, mais cet ordre n'est qu'indicatif: la grille 30 sera très certainement jugée plus compliquée que la 10, mais entre la 10 et la 11 les avis seront sans doute mitigés.
Enfin, comme en Mathématiques, il y a rarement unicité du raisonnement pour aboutir à la solution (il existe plusieurs centaines de démonstrations du fameux théorème de Pythagore). J'aime beaucoup questionner les joueurs sur les différents enchainements utilisés pour aboutir à la solution, afin de discuter de leur exactitude et voir leur grande variété.