POLYSSIMO - Dossier pédagogique

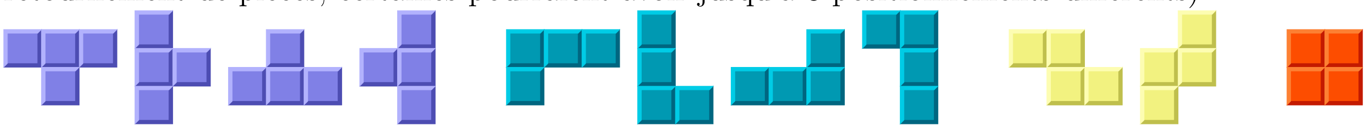
Un jeu de Alain Brobecker, édité par Djeco - **abrobecker.free.fr**

POLYSSIMO : Notions et compétences

POLYSSIMO est un jeu de manipulation géométrique en deux dimensions, il propose 30 défis de difficulté croissante. Les **notions** principales abordées avec POLYSSIMO sont la géométrie dans le plan, les polyminos (formes géométriques composées de carrés accolés par un côté), les surfaces et la décomposition de nombres.

Les **compétences** développées par la résolution des défis de POLYSSIMO sont:

- La familiarisation avec tous les positionnements dans le plan d'une même pièce, sans retournement. Dans POLYSSIMO certaines pièces ont 4 positionnements possibles (la violette et la turquoise), d'autres 2 positionnements possibles (la jaune), et une pièce a un seul positionnement (le carré). Le jeu permet de s'habituer à penser à tous les positionnements différents. (Si on autorisait le retournement de pièces, certaines pourraient avoir jusqu'à 8 positionnements différents)



- L'observation des pièces et des défis, pour repérer les endroits ou commencer les essais, en général ceux ou il y a le plus de contraintes en lien avec les pièces restantes.

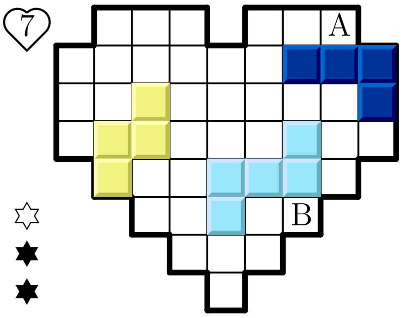
- L'organisation des essais afin de tester toutes les possibilités en allant au bout de chaque essai, et de ne pas tester à nouveau une possibilité déjà essayée sans succès.

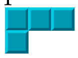
- Le passage d'une manipulation physique des pièces à une manipulation mentale. Ce passage se fait de manière naturelle, à force de pratique, et plus ou moins rapidement.

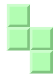
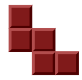
- Comme le jeu ne contient que des tétraminos (4 carrés accolés) et des pentaminos (5 carrés accolés), les seules surfaces pouvant être obtenues avec les pièces de POLYSSIMO sont multiples de 4 ou multiples de 5 ou une somme de ces deux multiples (càd de la forme $m \times 4 + n \times 5$ avec $m; n$ deux nombres entiers positifs non simultanément nuls).
  Mesurer les surfaces restant à compléter permet parfois de savoir quel type de pièces y mettre, c'est une technique très efficace dans ce jeu comme nous allons le voir.

POLYSSIMO : Raisonnements

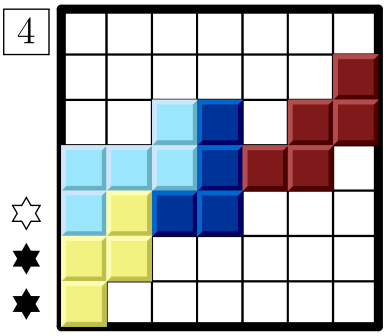
Observer les contraintes imposées par le défi, s'organiser



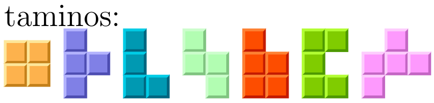
Les deux endroits les plus contraignants du défi sont notés par des lettres. La case A ne peut être atteinte qu'avec le tétramino turquoise  que l'on place donc immédiatement.

La case B peut être atteinte avec deux pièces:  ou . On essaye de placer la première pièce et comme on aboutit à une impossibilité, on essaye avec la pièce suivante.

Compter les cases pour faire deux groupes de polyminos

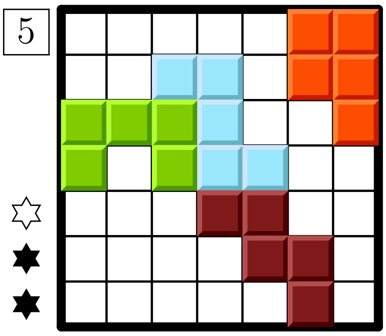


Le plateau est séparé en deux zones: de 15 cases en bas et de 16 cases en haut. Or il reste à placer 4 tétraminos et 3 pentaminos:

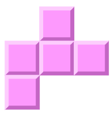


Avec ces pièces, la seule manière d'obtenir 15 et 16 cases est de mettre **les 3 pentaminos dans la zone du bas de 15 cases** ($3 \times 5 = 15$), et **les 4 tétraminos dans la zone du haut de 16 cases** ($4 \times 4 = 16$).

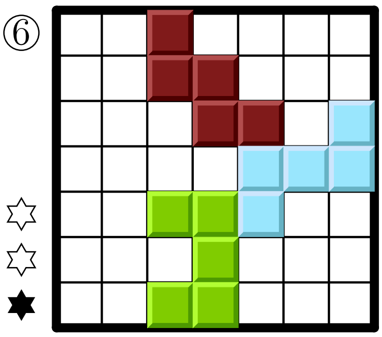
Compter les cases pour trouver la position de certains polyminos



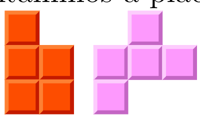
Le plateau est séparé en deux zones: de 13 cases en bas à gauche et de 16 cases. Or il reste un seul pentamino à placer:



Ce pentamino se trouve alors dans la zone en bas à gauche avec deux tétraminos pour un total de 13 cases, car la seule manière d'obtenir 13 est $2 \times 4 + 1 \times 5 = 13$.



Le plateau est séparé en trois zones: deux zones de 8 cases et une zone de 18 cases. Or il reste deux pentaminos à placer:



Ces deux pentaminos se trouvent alors dans la zone de 18 cases avec deux tétraminos, car la seule manière d'obtenir 18 est $2\times4+2\times5 = 18$. On peut commencer par les deux petites zones, toutefois celle en bas à droite peut être remplie de plusieurs manières.

Compter les cases pour limiter les essais

Le problème 14 est séparé en deux zones: de 10 cases à gauche et de 21 cases à droite. Cela nous indique que la partie gauche contient deux pentaminos sur les trois restants et rien d'autre. On commence par cette zone car elle est plus petite. Comme il n'y a qu'une manière de la remplir, cela nous donne les pièces qui restent pour la zone de droite.

POLYSSIMO : Classification des défis par raisonnement

? désigne un défi du jeu d'origine, $\boxed{?}$ désigne un défi supplémentaire sur la grille carrée et enfin ♡? désigne un défi supplémentaire sur la grille en forme de coeur.

- L'empreinte d'au moins un polymino est visible:
  1 , 2 , 3 , 4 , $\boxed{1}$, ♡1

- Tous les tétraminos sont dans une zone, tous les pentaminos dans une autre:
  $15 + 16 = (3 \times 5) + (4 \times 4)$: 7 , 9 , 11 , 12 , $\boxed{4}$

- On sait dans quelle zone sont les tétraminos:
  $10 + 21 = (2 \times 5) + (4 \times 4 + 5)$: 14 , 16 , 18
  $15 + 18 = (3 \times 5) + (2 \times 4 + 2 \times 5)$: ♡3
  $15 + 21 = (3 \times 5) + (4 \times 4 + 1 \times 5)$: 19 , $\boxed{6}$, ♡4

- On sait dans quelle zone sont le ou les pentaminos:
  $8 + 8 + 18 = (2 \times 4) + (2 \times 4) + (2 \times 4 + 2 \times 5)$: 6 , 8
  $13 + 16 = (2 \times 4 + 1 \times 5) + (4 \times 4)$: 10 , 15 , $\boxed{5}$
  $16 + 19 = (4 \times 4) + (1 \times 4 + 3 \times 5)$: ♡5
  $16 + 23 = (4 \times 4) + (2 \times 4 + 3 \times 5)$: ♡8

- Unicité du remplissage d'au moins une zone constituée de plus d'un polymino:
  $\boxed{2}$ le remplissage de toutes les zones est unique.
  $\boxed{3}$ les deux zones de 8 cases admettent un remplissage unique.
  13 les deux zones de 9 cases admettent un remplissage unique.
  5 les zones en bas et à droite admettent un remplissage unique, pas la troisième zone.
  6 , 8 une zone de 8 cases admet un remplissage unique, mais l'autre zone de 8 cases en admet 3.
  ♡6 la zone de 9 cases admet un remplissage unique.
  14 , 16 , 18 la zone de 10 cases admet un remplissage unique.
  ♡2 la zone de 13 cases admet un remplissage unique.

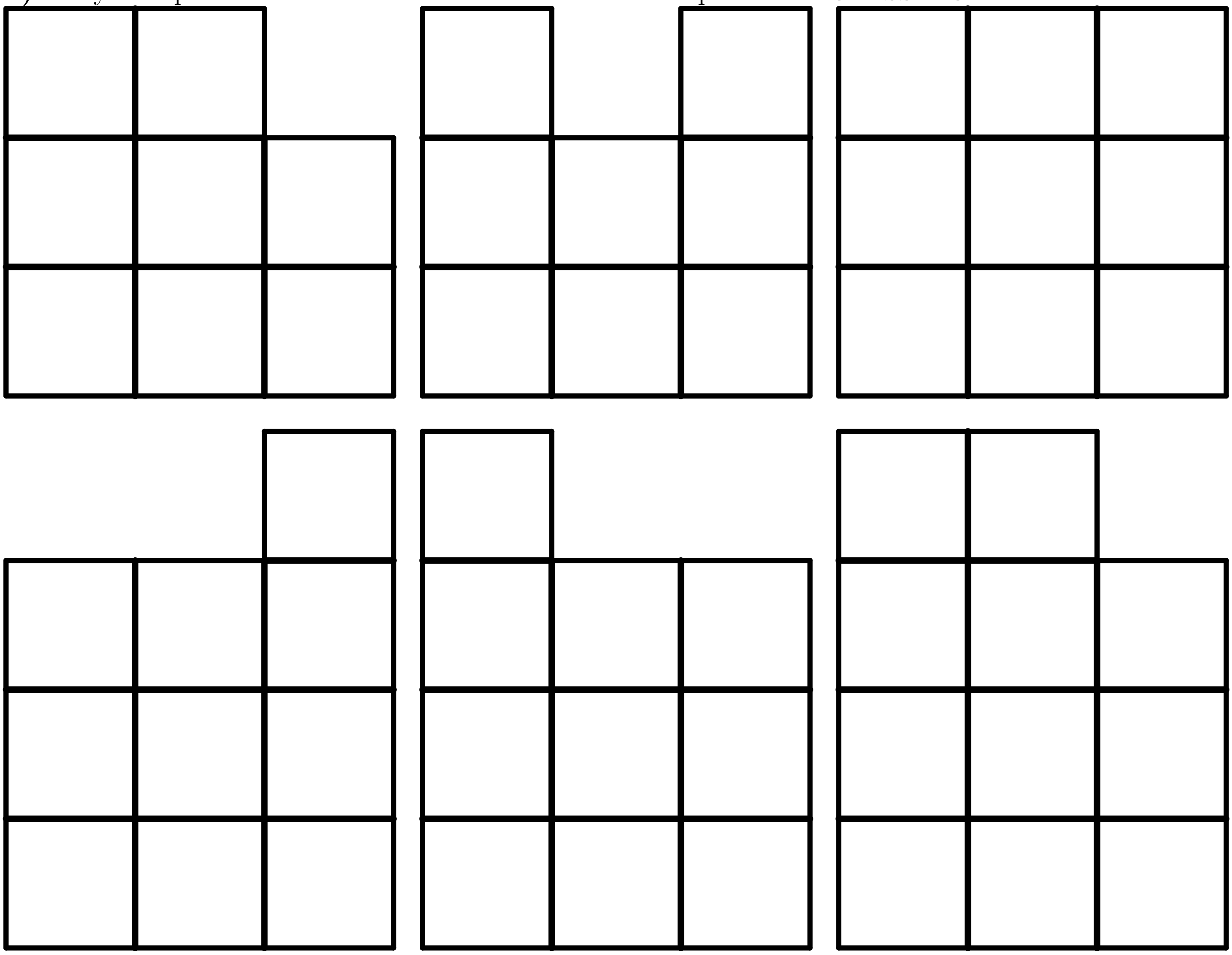
- Autres raisonnements:
  22 la zone de 17 cases ne peut pas contenir le pentamino vert, il est donc dans la zone de 18 cases.
  21 , $\boxed{9}$ seuls le pentamino T ou les pentaminos L peuvent aller dans l'anfractuosité. Mais les essais avec les L aboutissent à des impossibilités, c'est donc le T qui va dans l'anfractuosité.
  ...

POLYSSIMO : Quelques questions autour du jeu

1) Au total combien de petits carrés contiennent les 11 pièces de POLYSSIMO?

2) Peut-on séparer les pièces de POLYSSIMO en groupes de caractéristiques différentes?

3) Essayer de paver chacune des formes suivantes avec des pièces de POLYSSIMO:



4a) Peut-on paver un rectangle de 6×4 avec des pièces de POLYSSIMO?
4b) Peut-on paver un carré de 5×5 avec des pièces de POLYSSIMO?

5) Jeu libre: créer un carré 7×7 ou une autre forme avec les pièces de POLYSSIMO.

6) Quelles pièces du jeu possèdent un centre de symétrie? Un ou des axes de symétrie?

7a) Dessine tous les triominos (forme constituées de 3 carrés accolés par leurs côtés) possibles. Indique pour chacun d'eux son périmètre, l'existence d'un centre de symétrie et trace les axes de symétrie.
7b) Même questions avec les tétraminos (4 carrés accolés).
7c) Même questions avec les pentaminos (5 carrés accolés).
7d) Même questions avec les hexaminos (6 carrés accolés).
7e) Et ainsi de suite...

8) Y a t'il un lien entre la surface n d'un polymino de n cases et son périmètre?

9) Placer le plus petit nombre de pièces sur le plateau afin qu'aucune autre pièce de POLYSSIMO ne puisse être rajoutée.

POLYSSIMO : Quelques réponses autour du jeu

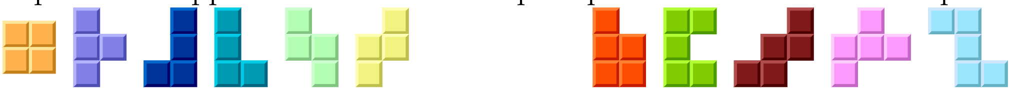
1) On peut compter les petits carrés, ou bien faire le calcul de plusieurs manières, en voici deux:

▷ Le jeu contient 6 tétraminos (4 carrés accolés) et 5 pentaminos (5 carrés accolés), il y a donc $6 \times 4 + 5 \times 5 = 24 + 25 = 49$ petits carrés.

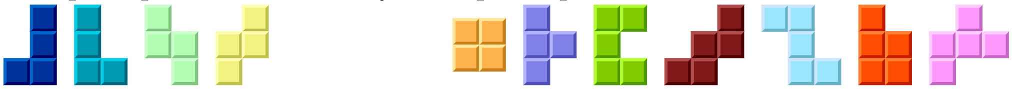
▷ Comme il est possible de créer le grand carré avec les 11 pièces, et que ce grand carré fait 7 petits carrés de côté, on aura au total $7 \times 7 = 7^2 = 49$ petits carrés.

2) On peut s'attendre à plusieurs réponses:

▷ Une réponse en rapport avec les surfaces qui sépare les tétraminos et les pentaminos:

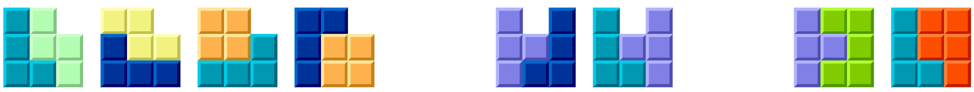
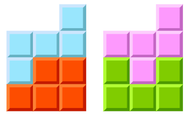


▷ Une réponse en fonction de l'existence d'une pièce symétrique dans le jeu:
(Notons que 5 pièces sont auto-symétrique et pourraient donc être incluses dans le premier groupe)



▷ Une réponse en rapport avec les possibiltés de positionnements différents d'une même pièce, un seul pour le carré, 2 pour les trois pièces suivantes et 4 pour les pièces restantes:

3) Les 4 premières grilles comportent $8 = 4 + 4$ cases, $9 = 4 + 5$ cases ou $10 = 5 + 5$ cases et peuvent être pavées avec des pièces du jeu, comme ci-dessous:

 $\times 4$ 

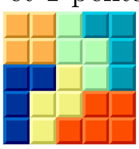
Les deux dernières grilles ne peuvent pas être pavées avec les pièces du jeu pour des raisons différentes:

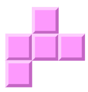
▷ L'avant dernière grille possède 10 cases, mais aucun assemblage de deux pentaminos présents dans le jeu POLYSSIMO n'épouse cette forme (à moins de les retourner).

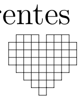
▷ La dernière grille possède 11 cases, et il est impossible d'obtenir cette valeur avec uniquement des multiples de 4 et des multiples de 5 additionnés, c'est à dire avec un calcul de la forme $m \times 4 + n \times 5$ avec $m; n$ deux nombres entiers positifs. 11 est d'ailleurs le plus grand nombre qu'on ne peut pas obtenir avec une telle décomposition.

4a) Il n'est pas possible de paver le rectangle 6×4 avec les pièces du jeu POLYSSIMO. Ce résultat a été démontré à l'aide d'un logiciel qui essaye toutes les possibilités.

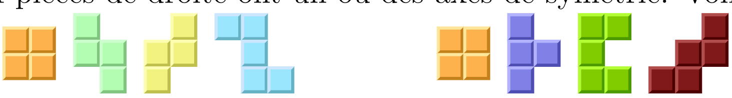
4b) Il y a 136 manières de paver le carré 5×5 avec les pièces de POLYSSIMO, toujours en utilisant 5 tétraminos et 1 pentamino (autrement dit $5 \times 4 + 5$, mais jamais 5×5), par exemple:



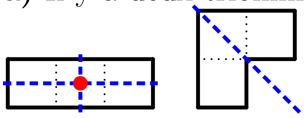
Noter qu'aucun de ces pavages ne contient la pièce rose: 

5) Il y a au total 960 manières différentes de remplir le carré de 7×7 avec les pièces de POLYSSIMO. Il y a 448 manières de remplir le coeur  avec les pièces de POLYSSIMO.

6) Les 4 pièces de gauche ont un centre de symétrie (chacune est globalement invariante après un demi-tour). Les 4 pièces de droite ont un ou des axes de symétrie. Voir aussi les réponses **7b)** et **7c)**.

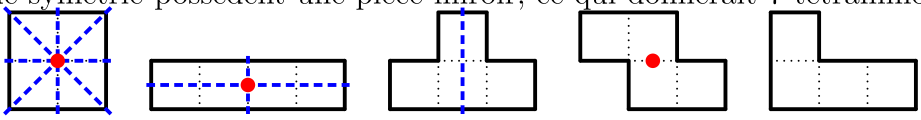


7a) Il y a deux triominos différents:



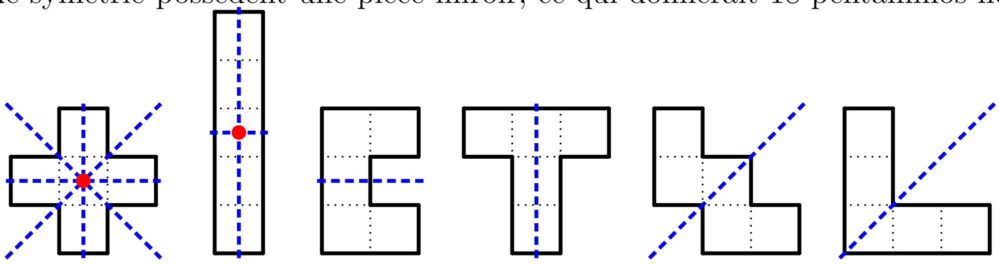
$p = 8$	$p = 8$
2 axes	1 axe
centre	

7b) Sans compter les pièces miroir, il y a cinq tétraminos différents. Les deux pièces qui n'ont pas d'axe de symétrie possèdent une pièce miroir, ce qui donnerait 7 tétraminos non réversibles.

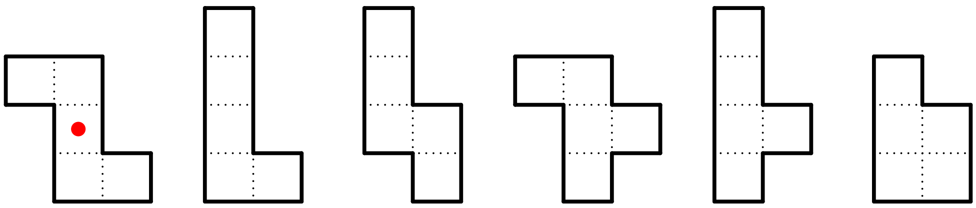


$p = 8$	$p = 10$	$p = 10$	$p = 10$	$p = 10$
4 axes	2 axes	1 axe	pas d'axe	pas d'axe
centre	centre		centre	

7c) Sans compter les pièces miroir, il y a douze pentaminos différents. Les six pièces qui n'ont pas d'axe de symétrie possèdent une pièce miroir, ce qui donnerait 18 pentaminos non réversibles.

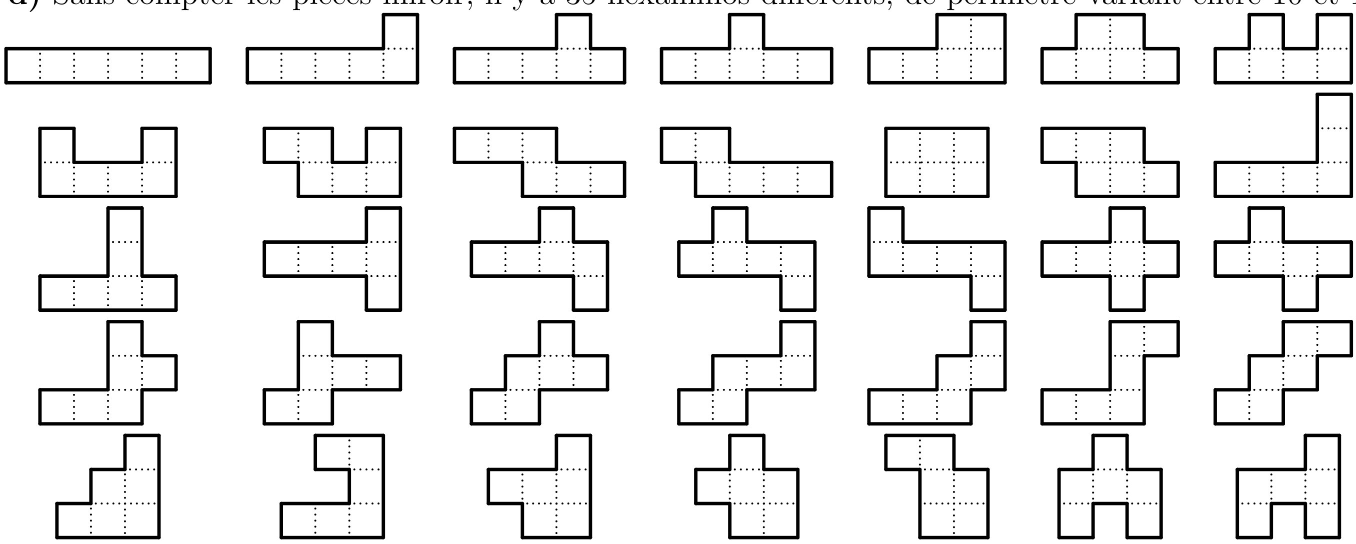


$p = 12$	$p = 12$	$p = 12$	$p = 12$	$p = 12$	$p = 12$
4 axes	2 axes	1 axe	1 axe	1 axe	1 axe
centre	centre				



$p = 12$	$p = 12$	$p = 12$	$p = 12$	$p = 12$	$p = 10$
pas d'axe	pas d'axe	pas d'axe	pas d'axe	pas d'axe	pas d'axe
centre					

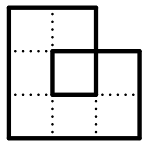
7d) Sans compter les pièces miroir, il y a 35 hexaminos différents, de périmètre variant entre 10 et 14.



7e) Voici le début des valeurs que l'on peut trouver sur la "Online Encyclopedia of Integer Sequence":

nombre de carrés des polyminos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
nombre de polyminos	1	1	2	5	12	35	108	369	1285	https://oeis.org/A000105
nombre de polyminos à une face	1	1	2	7	18	60	196	704	2500	https://oeis.org/A000988

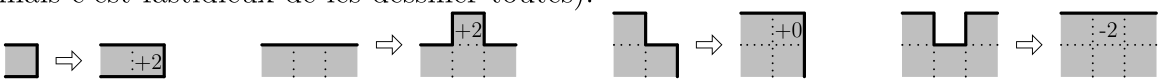
Ces valeurs ont été trouvées par recherche exhaustive à l'aide de programmes informatiques, ce qui semble raisonnable comme approche à cause du nombre élevé de solutions et des formes de plus en plus complexes qui apparaissent, comme par exemple l'heptamino (7 carrés) ci-contre qui possède un trou.



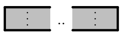
8) Y a t'il un lien entre la surface n d'un polymino de n cases et son périmètre?
Bien sûr chaque domino est différent, et on a vu aux questions **7a)** à **7c)** que les périmètres varient pour un même nombre n de carrés, la réponse ne sera donc pas une valeur unique, mais plutôt un encadrement entre le plus petit périmètre possible $P_{min}(n)$ et le plus grand périmètre possible $P_{max}(n)$. Autrement dit pour $n \geqslant 1$ donné on cherche un encadrement $P_{min}(n) \leqslant P(n) \leqslant P_{max}(n)$. On sait déjà que:

n	$P_{min}(n) \leqslant P(n) \leqslant P_{max}(n)$
1	$4 \leqslant P(1) \leqslant 4$
2	$6 \leqslant P(2) \leqslant 6$
3	$8 \leqslant P(3) \leqslant 8$
4	$8 \leqslant P(4) \leqslant 10$
5	$10 \leqslant P(5) \leqslant 12$
6	$10 \leqslant P(6) \leqslant 14$

On démontre facilement par récurrence que $P_{max}(n) \leqslant 2n+2$: C'est le cas pour les valeurs $n \in [1;6]$, et lorsqu'on accole un $n+1$ ème carré à un polymino de n carrés, alors on rajoute au plus deux unités au périmètre comme on le voit avec les différentes situations ci-dessous (il existe davantage de situations, mais c'est fastidieux de les dessiner toutes):



Donc $P_{max}(n+1) \leqslant P_{max}(n) + 2$
Donc $P_{max}(n+1) \leqslant 2n+2+2$
Donc $P_{max}(n+1) \leqslant 2(n+1)+2$ ce qui montre que $2n+2$ est un majorant de $P_{max}(n)$.

Comme la barre droite de n carrés  a un périmètre de $2n+2$, on en déduit que ce majorant est atteint, et donc $\boxed{P_{max}(n) = 2n+2}$.

L'étude du périmètre minimum promet d'être plus difficile, on pense bien sûr aux rectangles mais aussi aux disques qui minimisent le périmètre pour une surface donnée. Les valeurs connues de $P_{min}(n)$ sont données dans la "Online Encyclopedia of Integer Sequence": https://oeis.org/A027709

9) La meilleure solution que j'ai trouvée (à la main) est de placer 5 pièces sur les 11, pour un total de 21 cases sur 49 comme sur la figure ci-dessous: