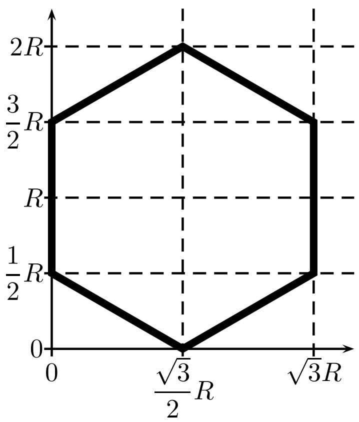
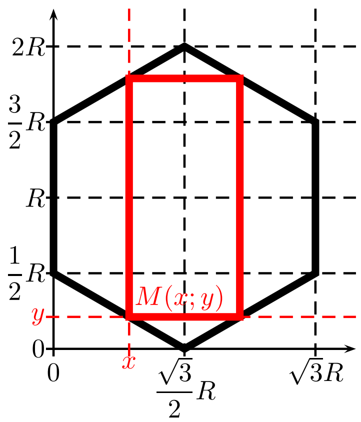
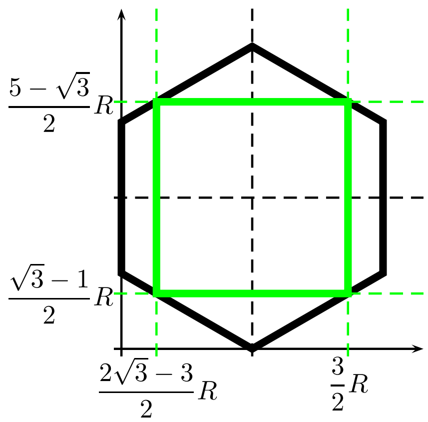
Carré axial inscrit et carré axial circonscrit à un hexagone

Alain Brobecker, 2017/11/19

On considère un hexagone régulier de rayon R dont les coordonnées sont visibles en première figure. Cherchons les coordonnées du **carré axial inscrit** dans l'hexagone. Pour cela prenons un point $M(x;y)$ sur un bord de l'hexagone, traçons le rectangle associé (en rouge), puis cherchons les contraintes sur x et y pour obtenir un carré (en vert).







On sait que le point $M(x;y)$ est sur la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ passant par les points $(0; \frac{1}{2}R)$ et $(\frac{\sqrt{3}}{2}R; 0)$.

▷ Comme $(0; \frac{1}{2}R) \in \mathcal{D}$ on obtient $\frac{1}{2}R = a \times 0 + b$, donc $b = \frac{1}{2}R$.

▷ Comme $(\frac{\sqrt{3}}{2}R; 0) \in \mathcal{D}$ on obtient $0 = a \times \frac{\sqrt{3}}{2}R + \frac{1}{2}R$, donc $a = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

La droite $\mathcal{D}$ a donc pour équation $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{2}R$, et les coordonnées de M vérifient cette équation.

Pour obtenir un carré on veut que la demi-largeur du rectangle soit égale à la demi-hauteur du rectangle, autrement dit que les coordonnées de M vérifient aussi $\frac{\sqrt{3}}{2}R - x = R - y$.

Les coordonnées de $M(x;y)$ vérifient donc le système suivant: $\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{2}R & (1) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}R - x = R - y & (2) \end{cases}$

En remplaçant y dans (2) on obtient $\frac{\sqrt{3}}{2}R - x = R + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{2}R$ ce qui équivaut à $\frac{\sqrt{3}+3}{3} \times x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times R$ puis à:

$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{3}{\sqrt{3}+3} \times R = \frac{3\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+6} \times R = \frac{3\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+6} \times \frac{2\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}-6} \times R = \frac{18-18\sqrt{3}-6\sqrt{3}+18}{12-36} \times R$

Après simplification on trouve $\boxed{x = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}R}$

En remplaçant cette valeur dans (1) on obtient $y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \times R + \frac{1}{2}R = \frac{-6+3\sqrt{3}+3}{6} \times R$

Après simplification on trouve $\boxed{y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}R}$

Les coordonnées du coin supérieur droit du carré sont alors $x = \frac{3}{2}R$ et $y = \frac{5-\sqrt{3}}{2}R$

Enfin le côté du carré vaut $c = \frac{3}{2} \times R - \frac{2\sqrt{3}-3}{2} \times R$, ce qui se simplifie en $\boxed{c = (3-\sqrt{3}) \times R}$

Les coordonnées du **carré axial circonscrit** à l'hexagone sont plus simples à trouver. En effet on sait que le côté sera maintenant $2R$ et que le centre de l'hexagone, de coordonnées $(\frac{\sqrt{3}}{2}R; R)$, est aussi le centre du carré.