Découpage de carrés en carrés

On considère un carré unité et un nombre $n \in \mathbb{N}^*$. Est-il possible de découper le carré unité en n carrés plus petits?
(Les n carrés ne sont pas forcément tous de la même taille)

Pour quelle valeurs de n ce découpage est-il possible? Démontrez le!
Pour quelle valeurs de n ce découpage est-il unique? Démontrez le!
Pour une valeur de n donnée, quel est le découpage "optimal"? Démontrez le!

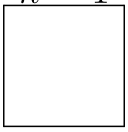
$\diamond \quad \diamond \quad \diamond \quad \diamond$

Mêmes questions pour un découpage de triangle équilatéral en triangles équilatéraux plus petits.

$\diamond \quad \diamond \quad \diamond \quad \diamond$

Mêmes questions pour un découpage de cubes en cubes plus petits.

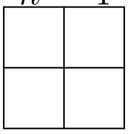
$n = 1$



$n = 2$ et $n = 3$

impossible: si c'était possible, au moins un des petits carrés devrait toucher 2 coins du carré originel, il aurait donc la même taille que ce dernier, ce qui contredit que nous aurions découpé le carré originel.

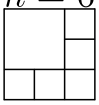
$n = 4$



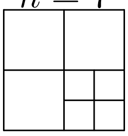
$n = 5$

impossible: les 4 coins sont touchés par des carrés différents (sinon voir raisonnement pour $n = 2$ et $n = 3$)...

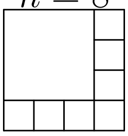
$n = 6$



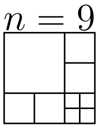
$n = 7$



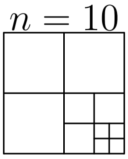
$n = 8$



$n = 9$

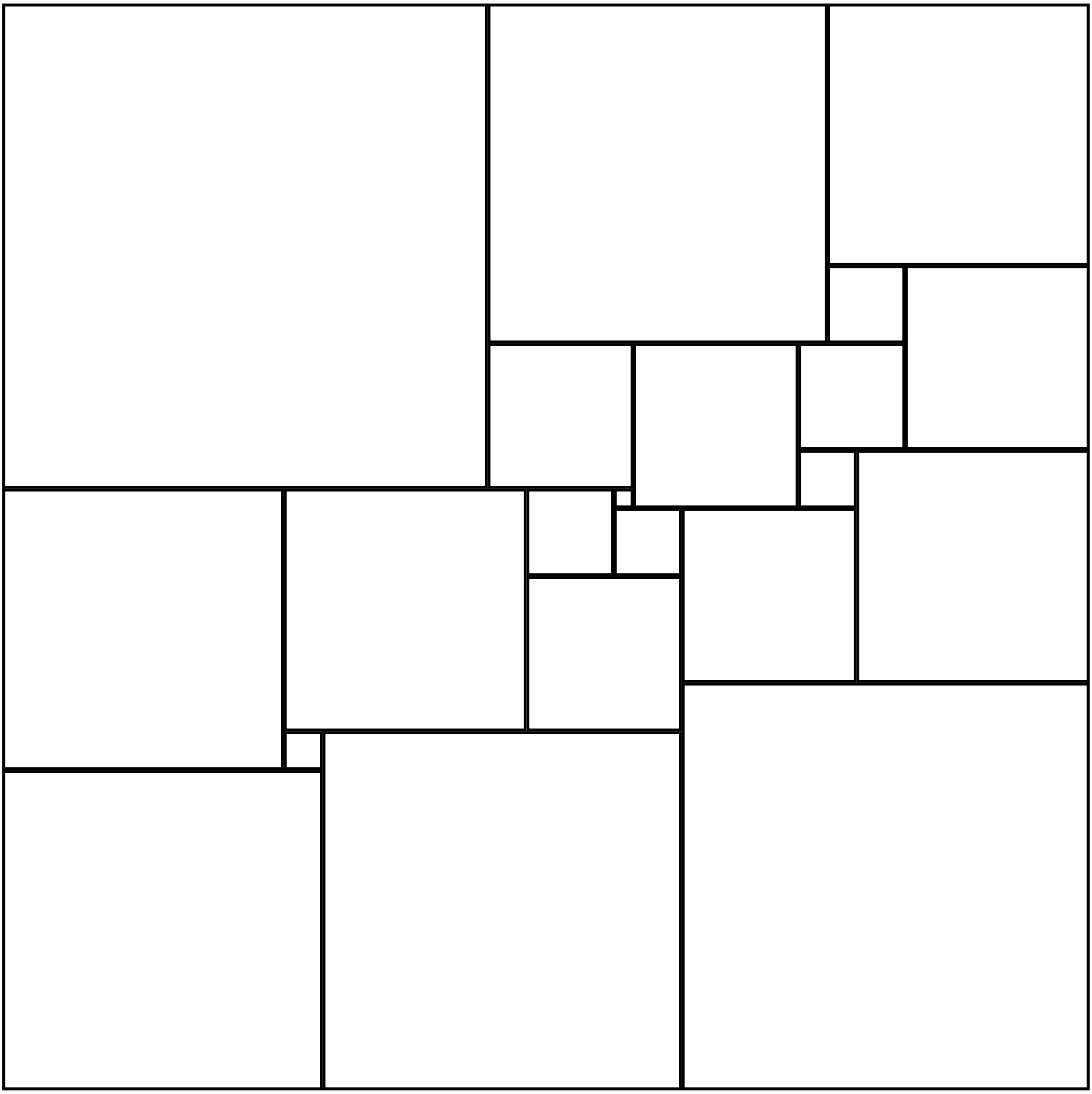


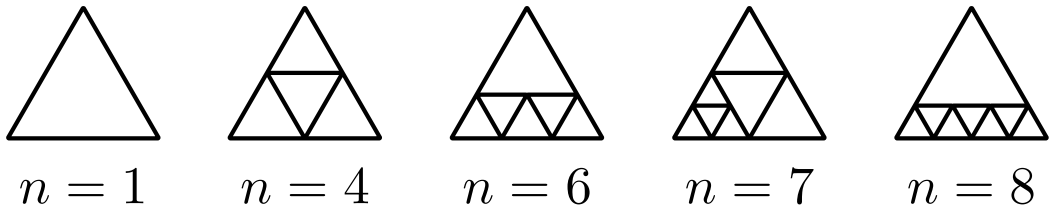
$n = 10$



Pour les valeurs supérieures de n il suffit de remarquer que si un découpage en k carrés est possible, alors un découpage en $k + 3$ carrés est possible (à la manière de $n = 7$). Toutes les valeurs $n > 10$ admettent donc un découpage.

Un **carré parfait** est divisible en carré plus petits et tous différents. L'existence de tels carrés fut établie, par des voies différentes, en 1939 par R. S. Sprague de Berlin et en 1940 par quatre étudiants de Cambridge: R. L. Brookes, C.A. Smith, A. H. Stone et W.T. Tutte. Le découpage le plus petit possible est dû à A.J.W. Duijvestijn en 1978. Il décompose le carré initial de côté 112 en 21 carrés inégaux. La recherche de tels carrés ne relève pas seulement du domaine des mathématiques récréatives: les carrés parfaits sont utilisés dans la théorie de Kirchoff sur la distribution des intensités électriques dans un réseau. *(Dictionnaire des Mathématiques, Alain Bouvier, Michel George, François Le Lionnais)*




$n = 1$
$n = 4$
$n = 6$
$n = 7$
$n = 8$