Équation cartésienne d'une droite
Projeté orthogonal d'un point sur une droite
Distance d'un point à une droite
Propriétés

Alain Brobecker, 2015/07/14

On considère que le plan est muni d'un repère orthonormé

1. Équation cartésienne d'une droite

$\boxed{\text{Propriétés:}}$

1) Si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

2) Réciproquement si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Démonstration:
1) Si $a=0$ alors $b \neq 0$, et $\mathcal{D}$ a pour équation $by+c=0$ ..
Si $a \neq 0$ alors ...
2) ...

$\boxed{\text{Propriété:}}$ Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts du plan.
Alors $(y_B - y_A)x + (x_A - x_B)y + x_B y_A - x_A y_B = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).

Démonstration:
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + c = 0$.
Comme $A(x_A; y_A) \in (AB)$ les coordonnées de A vérifient:
$(y_B - y_A)x_A - (x_B - x_A)y_A + c = 0$
d'où $c = x_B y_A - x_A y_A - y_B x_A + x_A y_A = x_B y_A - x_A y_B$.

2. Projeté orthogonal d'un point sur une droite, distance d'un point à une droite

$\boxed{\text{Propriété:}}$ Soient $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$, $M(x_M; y_M)$ un point du plan et $P(x_P; y_P)$ le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Alors:

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{b^2 x_M - ab y_M - ac}{a^2+b^2} \\ y_P = \dfrac{a^2 y_M - ab x_M - bc}{a^2+b^2} \end{cases}$$

et $distance(M; \mathcal{D}) = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Démonstration: *(la plus rapide?)*

$\overrightarrow{N}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$, donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ de norme 1.

On cherche $P(x_P; y_P) \in \mathcal{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{n}$.

$$\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{n} \Rightarrow \begin{cases} x_P = x_M + \lambda \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y_P = y_M + \lambda \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
P(x_P;y_P)\in\mathcal{D} &\Rightarrow a\left(x_M+\lambda\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+b\left(y_M+\lambda\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+c=0\\
&\Rightarrow ax_M+by_M+c+\lambda\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=0\\
&\Rightarrow ax_M+by_M+c+\lambda\sqrt{a^2+b^2}=0\\
&\Rightarrow \lambda=-\frac{ax_M+by_M+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_P=x_M-\dfrac{a(ax_M+by_M+c)}{a^2+b^2}\\ y_P=y_M-\dfrac{b(ax_M+by_M+c)}{a^2+b^2}\end{array}\right.\\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_P=\dfrac{b^2x_M-aby_M-ac}{a^2+b^2}\\ y_P=\dfrac{a^2y_M-abx_M-bc}{a^2+b^2}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{n}$ est de norme 1 alors $distance(M;\mathcal{D})=|\lambda|=\dfrac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Autre démonstration: *(plus simple mais nécessite davantage de travail?)*

$\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

On cherche $P(x_P;y_P)\in\mathcal{D}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{N}$.

$\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{n}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_P=x_M+\lambda a\\ y_P=y_M+\lambda b\end{array}\right.$

$$\begin{aligned}
P(x_P;y_P)\in\mathcal{D} &\Rightarrow a(x_M+\lambda a)+b(y_M+\lambda b)+c=0\\
&\Rightarrow ax_M+by_M+c+\lambda(a^2+b^2)=0\\
&\Rightarrow \lambda=-\frac{ax_M+by_M+c}{a^2+b^2}\\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_P=x_M-\dfrac{a(ax_M+by_M+c)}{a^2+b^2}\\ y_P=y_M-\dfrac{b(ax_M+by_M+c)}{a^2+b^2}\end{array}\right.\\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_P=\dfrac{b^2x_M-aby_M-ac}{a^2+b^2}\\ y_P=\dfrac{a^2y_M-abx_M-bc}{a^2+b^2}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On calcule ensuite $distance(M;\mathcal{D})=||\overrightarrow{MP}||$ ce qui semble laborieux.

Autre démonstration: *(on n'introduit pas le coefficient de colinéarité λ)*

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

On cherche $P(x_P;y_P)$ tel que $P\in\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{u}=0$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}ax_P+by_P+c=0\\ (x_P-x_M)\times(-b)+(y_P-y_M)\times a=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}ax_P=-by_P-c\\ (x_P-x_M)\times(-b)\times a+(y_P-y_M)\times a^2=0\end{array}\right.$ $\qquad\Rightarrow$ car a pourrait être nul.

$\Rightarrow(ax_P-ax_M)\times(-b)+(y_P-y_M)\times a^2=0$

$\Rightarrow(-by_P-c-ax_M)\times(-b)+(y_P-y_M)\times a^2=0$

$\Rightarrow b^2y_P+bc+abx_M+a^2y_P-a^2y_M=0$

$\Rightarrow y_P(a^2+b^2)=a^2y_M-abx_M-bc$

$\Rightarrow y_P=\dfrac{a^2y_M-abx_M-bc}{a^2+b^2}$

De même on montre que $x_P=\dfrac{b^2x_M-aby_M-ac}{a^2+b^2}$.

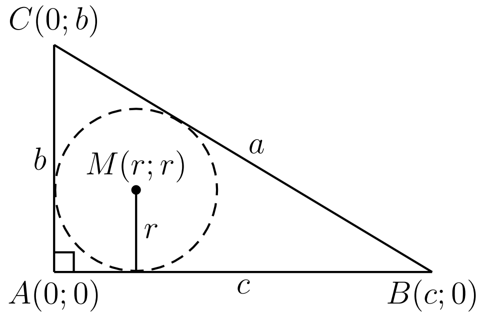
On calcule ensuite $distance(M;\mathcal{D})=||\overrightarrow{MP}||$ ce qui semble laborieux.

3. Propriétés

Propriété:

Soit un triangle rectangle dont la longueur de l'hypoténuse vaut a et les longueurs des deux côtés de l'angle droit valent b et c.

Alors le rayon du cercle inscrit vaut $r = \dfrac{b+c-a}{2}$.



Démonstration:

On choisit le repère donnant les coordonnées indiquées sur le dessin.

Une équation cartésienne de (BC) est $(y_B - y_C)x + (x_C - x_B)y + x_B y_C - x_C y_B = 0$, soit $-bx - cy + bc = 0$.

On a alors $distance(M;(BC)) = \dfrac{|-br-cr+bc|}{\sqrt{b^2+c^2}} = \dfrac{|bc-r(b+c)|}{a}$.

Supposons que b est la plus petite longueur, alors $r \leqslant \dfrac{b}{2}$ donc $bc - r(b+c) \geqslant bc - \dfrac{b}{2}(b+c) = \dfrac{bc-b^2}{2} \geqslant 0$

donc $|bc-r(b+c)| = bc - r(b+c)$ et finalement $distance(M;(BC)) = \dfrac{bc-r(b+c)}{a}$.

Pour que $M(r;r)$ soit le centre du cercle inscrit il faut et il suffit que $distance(M;(BC)) = r$.

$$
\begin{aligned}
distance(M;(BC)) = r \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{bc-r(b+c)}{a} = r \\
&\Leftrightarrow \quad bc - r(b+c) = ar \\
&\Leftrightarrow \quad r(a+b+c) = bc \\
&\Leftrightarrow \quad r = \frac{bc}{a+b+c} \\
&\Leftrightarrow \quad r = \frac{bc}{a+b+c} \times \frac{b+c-a}{b+c-a} \\
&\Leftrightarrow \quad r = \frac{bc(b+c-a)}{(b+c+a)(b+c-a)} \\
&\Leftrightarrow \quad r = \frac{bc(b+c-a)}{(b+c)^2-a^2} \\
&\Leftrightarrow \quad r = \frac{bc(b+c-a)}{b^2+2bc+c^2-a^2} \\
&\Leftrightarrow \quad r = \frac{bc(b+c-a)}{2bc} \\
&\Leftrightarrow \quad r = \frac{b+c-a}{2}
\end{aligned}
$$

Propriété:

Dans un triangle rectangle la somme des côtés de l'angle droit vaut la somme des diamètres des cercles inscrit et circonscrit.

Démonstration:

On utilise les notations de la figure ci-dessus et on appelle R le rayon du cercle circonscrit.

Dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit est au milieu de l'hypoténuse, donc $R = \dfrac{a}{2}$.

Donc $2r + 2R = 2 \times \dfrac{b+c-a}{2} + 2 \times \dfrac{a}{2} = b + c - a + a = b + c$.