Recherche de l'équation d'une parabole passant par 3 points
(Alain Brobecker, novembre 2015)

Soit une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par trois points distincts $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$. Les points étant distincts on a x_A; x_B; x_C différents deux à deux, ce qui évite les divisions par zéro dans ce qui suit.
Comme $A; B; C \in \mathcal{P}^3$ alors les coefficients a; b et c vérifient le système suivant:

$$\begin{cases} ax_A^2 + bx_A + c = y_A & (1) \\ ax_B^2 + bx_B + c = y_B & (2) \\ ax_C^2 + bx_C + c = y_C & (3) \end{cases}$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = y_A - ax_A^2 - bx_A} \ (4)$$

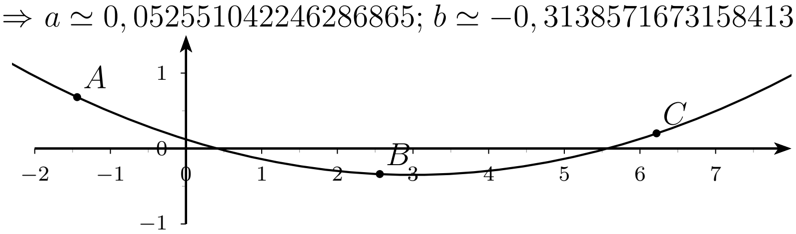
$$\begin{aligned}
(2) \text{ et } (4) \quad & \Rightarrow \quad ax_B^2 + bx_B + y_A - ax_A^2 - bx_A = y_B \\
& \Rightarrow \quad b(x_B - x_A) = y_B - y_A - a(x_B^2 - x_A^2) \\
& \Rightarrow \quad b = \frac{y_B - y_A - a(x_B + x_A)(x_B - x_A)}{x_B - x_A} \\
& \Rightarrow \quad \boxed{b = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - a(x_B + x_A)} \ (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3),(4) \text{ et } (5) \quad & \Rightarrow \quad ax_C^2 + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - a(x_B + x_A)\right) x_C + y_A - ax_A^2 - \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - a(x_B + x_A)\right) x_A = y_C \\
& \Rightarrow \quad a\left(x_C^2 - x_A^2 + (x_B + x_A)(x_A - x_C)\right) = y_C - y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A) \\
& \Rightarrow \quad a\left((x_C - x_A)(x_C + x_A) - (x_B + x_A)(x_C - x_A)\right) = y_C - y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A) \\
& \Rightarrow \quad a(x_C - x_A)(x_C + x_A - x_B - x_A) = y_C - y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A) \\
& \Rightarrow \quad a(x_C - x_A)(x_C - x_B) = y_C - y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A) \\
& \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{y_C - y_A}{(x_C - x_A)(x_C - x_B)} - \frac{y_B - y_A}{(x_B - x_A)(x_C - x_B)}}
\end{aligned}$$

Exemples:

▷ $A(0; 0)$; $B(1; 1)$ et $C(3; -3) \Rightarrow a = -1$; $b = 2$ et $c = 0$

▷ $A(-1,44; 0,68)$; $B(2,56; -0,34)$ et $C(6,22; 0,2)$
$\Rightarrow a \simeq 0,052551042246286865$; $b \simeq -0,3138571673158413$ et $c \simeq 0,11907583786328818$



Les valeurs du deuxième exemple ont été calculées avec un petit programme Javascript disponible sur mon site http://abrobecker.free.fr , les valeurs du premier exemple ont été calculées à la main et avec le programme Javascript.

En page 2 j'ai inclus un devoir à la maison très apprécié de mes élèves de 1ère scientifique, du temps ou j'étais prof. Ils devaient chercher (ou prendre) une photo d'un phénomène, d'un objet qui semblait avoir une forme parabolique, effectuer les calculs et conclure sur la vraisemblance de la forme parabolique. Il fallait bien insister qu'une réponse négative est une réponse intéressante!
Le petit programme Javascript a été écrit pour faciliter la correction. Un DM assez fun à corriger qui laisse beaucoup de liberté aux élèves (la banane a t'elle une forme parabolique? un jet d'eau? une paupière? un collier? le viaduc de garabit? ...)

Recherche d'une parabole d'après une photo

Lancer le logiciel GéoGebra. Avec l'outil "Point sur objet" placer un point sur l'axe Y, et deux points sur l'axe X. Charger une image dans GéoGebra par glisser/déposer. Déplacer les 3 points pour qu'ils soient sur la parabole supposée, puis noter leurs coordonnées.

Les points $A(0;1,76)$; $B(4,56;0)$ et $C(-4,7;0)$ appartiennent à la courbe étudiée.
On va utiliser la forme factorisée du polynôme du second degré:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \simeq a(x - 4,56)(x + 4,7)$$

On utilise les coordonnées du point A pour trouver le dernier coefficient:

$$f(0) \simeq 1,76$$
$$a(0 - 4,56)(0 + 4,7) \simeq 1,76$$
$$-21,432a \simeq 1,76$$
$$a \simeq 1,76 \div (-21,432) \simeq -0,0821$$

Le parabole a donc pour équation approchée:

$$f(x) \simeq -0,0821(x - 4,56)(x + 4,7) \simeq -0,0821x^2 - 0,011494x + 1,7595672$$

Rentrer cette équation dans la fenêtre de saisie de GéoGebra ($y = -0.0821x\wedge 2 - 0.011494x + 1.7595672$)**. Faire une impression d'écran de l'image et de la parabole associée. Dire si oui ou non la forme étudiée SEMBLE correspondre à une parabole.**

L'arc en ciel SEMBLE avoir une forme parabolique.