Recherche de l'équation d'une parabole passant par 3 points

(Alain Brobecker, novembre 2015)

Soit une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par trois points distincts $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$. Les points étant distincts on a x_A; x_B; x_C différents deux à deux, ce qui évite les divisions par zéro dans ce qui suit.
Comme $A; B; C \in \mathcal{P}^3$ alors les coefficients a; b et c vérifient le système suivant:

$$\begin{cases} ax_A^2 + bx_A + c = y_A & (1) \\ ax_B^2 + bx_B + c = y_B & (2) \\ ax_C^2 + bx_C + c = y_C & (3) \end{cases}$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = y_A - ax_A^2 - bx_A} \ (4)$$

$$\begin{aligned}
(2) \text{ et } (4) \quad &\Rightarrow \quad ax_B^2 + bx_B + y_A - ax_A^2 - bx_A = y_B \\
&\Rightarrow \quad b(x_B - x_A) = y_B - y_A - a(x_B^2 - x_A^2) \\
&\Rightarrow \quad b = \frac{y_B - y_A - a(x_B + x_A)(x_B - x_A)}{x_B - x_A} \\
&\Rightarrow \quad \boxed{b = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - a(x_B + x_A)} \ (5)
\end{aligned}$$

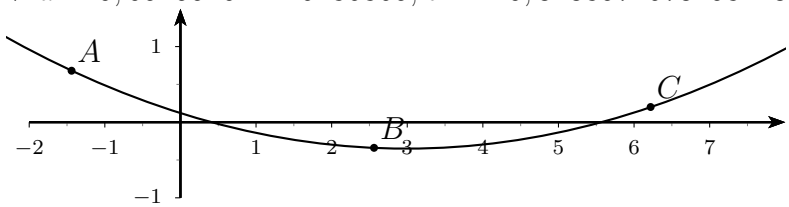
$$\begin{aligned}
(3),(4) \text{ et } (5) \quad &\Rightarrow \quad ax_C^2 + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - a(x_B + x_A)\right) x_C + y_A - ax_A^2 - \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - a(x_B + x_A)\right) x_A = y_C \\
&\Rightarrow \quad a\left(x_C^2 - x_A^2 + (x_B + x_A)(x_A - x_C)\right) = y_C - y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A) \\
&\Rightarrow \quad a\left((x_C - x_A)(x_C + x_A) - (x_B + x_A)(x_C - x_A)\right) = y_C - y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A) \\
&\Rightarrow \quad a(x_C - x_A)(x_C + x_A - x_B - x_A) = y_C - y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A) \\
&\Rightarrow \quad a(x_C - x_A)(x_C - x_B) = y_C - y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A) \\
&\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{y_C - y_A}{(x_C - x_A)(x_C - x_B)} - \frac{y_B - y_A}{(x_B - x_A)(x_C - x_B)}}
\end{aligned}$$

Exemples:

▷ $A(0; 0)$; $B(1; 1)$ et $C(3; -3) \Rightarrow a = -1$; $b = 2$ et $c = 0$

▷ $A(-1,44; 0,68)$; $B(2,56; -0,34)$ et $C(6,22; 0,2)$

$\Rightarrow a \simeq 0,052551042246286865$; $b \simeq -0,3138571673158413$ et $c \simeq 0,11907583786328818$



Les valeurs du deuxième exemple ont été calculées avec un petit programme Javascript disponible sur mon site http://abrobecker.free.fr , les valeurs du premier exemple ont été calculées à la main et avec le programme Javascript.