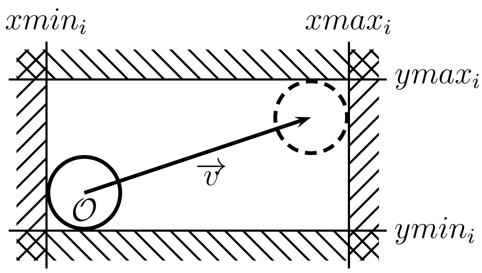
Kick those balls

Alain Brobecker, 1995 - 2013

1. Collision de deux disques mobiles

On considère deux disques $\mathcal{O}_1(x_1; y_1)$; r_1; m_1; $\overrightarrow{v_1}(vx_1; vy_1)$ et $\mathcal{O}_2(x_2; y_2)$; r_2; m_2; $\overrightarrow{v_2}(vx_2; vy_2)$ animés d'un mouvement rectiligne uniforme (ie il n'y a pas d'accélération, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$). On veut savoir s'ils rentreront en collision dans l'intervalle de temps $[t_0; t_1]$. Si oui on veut connaitre le moment de la collision $t \in [t_0; t_1]$, leurs positions au moment de la collision et leurs nouvelles vitesses.

1.i. Test d'intersection sur les boîtes englobantes



Pour chaque disque $i \in \{1; 2\}$ on a:

$$xmin_i = min(x_i + vx_i \times t_0; x_i + vx_i \times t_1) - r_i$$
$$xmax_i = max(x_i + vx_i \times t_0; x_i + vx_i \times t_1) + r_i$$
$$ymin_i = min(y_i + vy_i \times t_0; y_i + vy_i \times t_1) - r_i$$
$$ymax_i = max(y_i + vy_i \times t_0; y_i + vy_i \times t_1) + r_i$$

La collision est impossible lorsque $(xmax_2 < xmin_1)$ ou $(ymax_2 < ymin_1)$ ou $(xmax_1 < xmin_2)$ ou $(ymax_1 < ymin_2)$.
Donc la collision est possible et à étudier plus finement lorsque:

$$\boxed{(xmax_2 \geqslant xmin_1) \text{ et } (ymax_2 \geqslant ymin_1) \text{ et } (xmax_1 \geqslant xmin_2) \text{ et } (ymax_1 \geqslant ymin_2)}$$

1.ii. Test d'intersection

On recherche, si elle existe, la valeur de $t \in [t_0; t_1]$ vérifiant:

$$distance((x_1 + vx_1 \times t; y_1 + vy_1 \times t); (x_2 + vx_2 \times t; y_2 + vy_2 \times t)) = r_1 + r_2$$

On pose:

$$dx = x_2 - x_1$$
$$dvx = vx_2 - vx_1$$
$$dy = y_2 - y_1$$
$$dvy = vy_2 - vy_1$$

Nous devons alors chercher, si elle existe, la valeur de $t \in [t_0; t_1]$ vérifiant:

$$(dx + dvx \times t)^2 + (dy + dvy \times t)^2 = (r_1 + r_2)^2$$
$$\Leftrightarrow t^2 \times \underbrace{(dvx^2 + dvy^2)}_{a} + t \times \underbrace{2 \times (dx \times dvx + dy \times dvy)}_{b} + \underbrace{dx^2 + dy^2 - (r_1 + r_2)^2}_{c} = 0$$
$$\Leftrightarrow a \times t^2 + b \times t + c = 0$$

Si $a = 0$ les vitesses sont parallèles ($dvx = dvy = 0$) et il n'y aura pas de collision, donc $t = +\infty \notin [t_0; t_1]$.
Sinon on calcule $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$ et si $\Delta \geq 0$ l'équation possède deux racines:

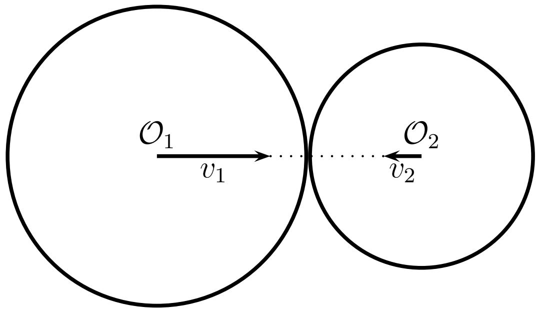
$$t_a = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} \quad \text{et} \quad t_b = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} \qquad \text{(on note que } t_a < t_b)$$

On prend comme solution, si elle existe, la plus petite des deux valeurs qui appartient à $[t_0; t_1]$.

Remarque: On a $\Delta = 4 \times a \times (r_1 + r_2)^2 - 4 \times (dy \times dvx - dx \times dvy)^2$ qui est un peu plus rapide à calculer lorsqu'on connait a. Mais si $\Delta \geq 0$ on a besoin de b et c donc le gain dépend de la fréquence des collisions. Or si on a fait les tests sur les boîtes englobantes, les collisions seront assez fréquentes, donc il vaut mieux recourir à la résolution précédente.

1.iii. Gestion de la collision, cas des vitesses alignées avec les centres de billes

Dans ce cas on confondra les vecteurs vitesses $\overrightarrow{v_i}$ avec leur valeur algébrique v_i le long de l'axe $(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)$. On appelera w_i la vitesse de la bille i après la collision.



On applique les lois de conservation de la dynamique.
Conservation de la quantité de mouvement:
(1) $\quad m_1 \times v_1 + m_2 \times v_2 = m_1 \times w_1 + m_2 \times w_2$
Conservation de l'énergie cinétique:
(2) $\quad \frac{1}{2}m_1 \times v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \times v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \times w_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \times w_2^2$
$\Leftrightarrow m_1 \times v_1^2 + m_2 \times v_2^2 = m_1 \times w_1^2 + m_2 \times w_2^2$

On résoud le système précédent par substitution:

$$(1) \Rightarrow w_2 = \frac{m_1 \times v_1 + m_2 \times v_2 - m_1 \times w_1}{m_2}$$

$$(2) \Rightarrow m_1 \times v_1^2 + m_2 \times v_2^2 = m_1 \times w_1^2 + m_2 \times \left(\frac{m_1 \times v_1 + m_2 \times v_2 - m_1 \times w_1}{m_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow ...$$

$$\Rightarrow w_1^2 \times \underbrace{\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right)}_{a} + w_1 \times \underbrace{\left(-2m_1 \times v_2 - \frac{2m_1^2}{m_2} \times v_1\right)}_{b} + \underbrace{\frac{m_1^2}{m_2} \times v_1^2 - m_1 \times v_1^2 + 2m_1 \times v_1 \times v_2}_{c} = 0$$

On résoud l'équation du second degré en w_1:

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = ... = 4 \times m_1^2 \times (v_1 - v_2)^2 \geq 0$$

$$w_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = ... = \frac{m_1 \times v_1 + m_2 \times v_2 \pm m_2 \times \mid v_1 - v_2 \mid}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \times v_1 + m_2 \times v_2 \pm m_2 \times (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

Une des deux solutions est $w_1 = v_1$, c'est l'autre qui nous intéresse, on obtient donc:

$$w_1 = v_1 \times \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_2 \times \frac{2 \times m_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{et} \qquad w_2 = v_2 \times \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + v_1 \times \frac{2 \times m_1}{m_1 + m_2}$$

On pourra multiplier les vitesses par un coefficient qui simulera l'absorption d'énergie lors du choc. Ce coefficient doit sans doute dépendre de la matière des billes, peut-être de leur poids? On peut même avoir un coefficient supérieur à 1 pour simuler un bumper de flipper.

1.iv. Gestion de la collision, cas général

Seules les composantes des vitesses alignées avec l'axe $(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)$ sont affectées, en accord avec les formules ci-dessus. Calculons d'abord les coordonnées d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ de l'axe $(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)$, puis les valeurs algébriques u_i associées aux composantes des vecteurs $\overrightarrow{v_i}$ le long de cet axe.

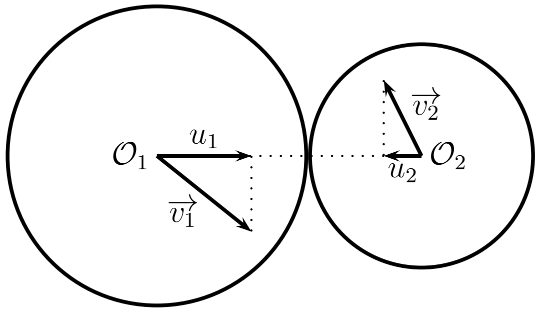
$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2}}{\mid\mid \overrightarrow{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2} \mid\mid} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2}}{distance(\mathcal{O}_1;\mathcal{O}_2)}$$

$$d = distance(\mathcal{O}_1;\mathcal{O}_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overrightarrow{n}(nx;ny) = \left(\frac{x_2 - x_1}{d}; \frac{y_2 - y_1}{d}\right)$$

$$u_1 = \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{n} = vx_1 \times nx + vy_1 \times ny$$

$$u_2 = \overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{n} = vx_2 \times nx + vy_2 \times ny$$



On est ramené au cas étudié dans le paragraphe précédent:

$$\mu_1 = u_1 \times \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + u_2 \times \frac{2 \times m_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{et} \qquad \mu_2 = u_2 \times \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + u_1 \times \frac{2 \times m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_1} + (\mu_1 - u_1) \times \overrightarrow{n}$$

$$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2} + (\mu_2 - u_2) \times \overrightarrow{n}$$

2. Collision d'un disque mobile et d'un disque immobile

Supposons que ce soit le premier disque qui soit immobile, ie $vx_1 = vy_1 = 0$.

Pour le test d'intersection sur les boites englobantes, la seule différence est que la boite englobante du disque immobile ne change pas au cours du temps.

Pour le test d'intersection sur les disques, la vitesse du disque immobile est nulle.

$$dx = x_2 - x_1$$
$$dy = y_2 - y_1$$

Nous devons alors chercher, si elle existe, la valeur de $t \in [t_0; t_1]$ vérifiant:

$$t^2 \times \underbrace{(vx_2^2 + vy_2^2)}_{a} + t \times \underbrace{2 \times (dx \times vx_2 + dy \times vy_2)}_{b} + \underbrace{dx^2 + dy^2 - (r_1 + r_2)^2}_{c} = 0$$

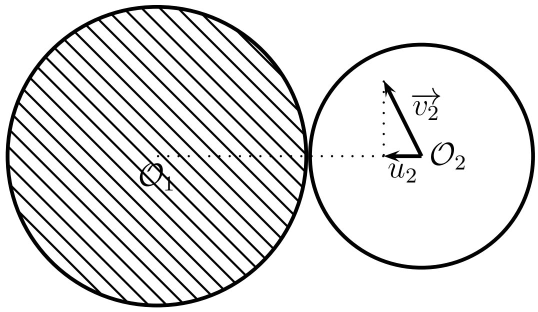
Si $a = 0$ le deuxième disque est aussi immobile et il n'y aura pas de collision, donc $t = +\infty \notin [t_0; t_1]$.
Sinon on calcule $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$ et si $\Delta \geq 0$ l'équation possède deux racines:

$$t_a = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} \qquad \text{et} \qquad t_b = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} \qquad \text{(on note que } t_a < t_b\text{)}$$

On prend comme solution, si elle existe, la plus petite des deux valeurs qui appartient à $[t_0; t_1]$.

Pour la gestion de la collision, la composante de la vitesse le long de l'axe $(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)$ est échangée pour le disque mobile uniquement (le deuxième).

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2}}{||\ \overrightarrow{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2}\ ||} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2}}{distance(\mathcal{O}_1; \mathcal{O}_2)}$$
$$d = distance(\mathcal{O}_1; \mathcal{O}_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\overrightarrow{n}(nx; ny) = \left(\frac{x_2 - x_1}{d}; \frac{y_2 - y_1}{d}\right)$$
$$u_2 = \overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{n} = vx_2 \times nx + vy_2 \times ny$$
$$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2} - 2 \times u_2 \times \overrightarrow{n}$$



3. Collision d'un disque contraint et d'un disque mobile

Un disque contraint est un disque animé d'un déplacement mais sur lequel le 2ème disque n'aura pas d'influence (par exemple la batte dans un casse brique).

4. Collision d'un disque mobile et d'une droite immobile

5. Collision d'un disque mobile et d'un segment immobile

6. Algorithme pour un système de plusieurs éléments