Pavages tatami-parfaits

D'après Pour La Science n°460, février 2016

Au japon on met au sol des tatamis (rectangles 2x1), de façon à ce qu'il y ait au plus 3 tatamis qui se rejoignent en un point (figure 1). Un pavage dans lequel 4 tatamis se rejoignent en un point est contraire à la tradition (figure 2).

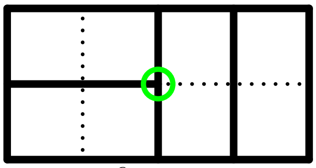


figure 1

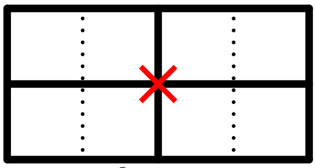
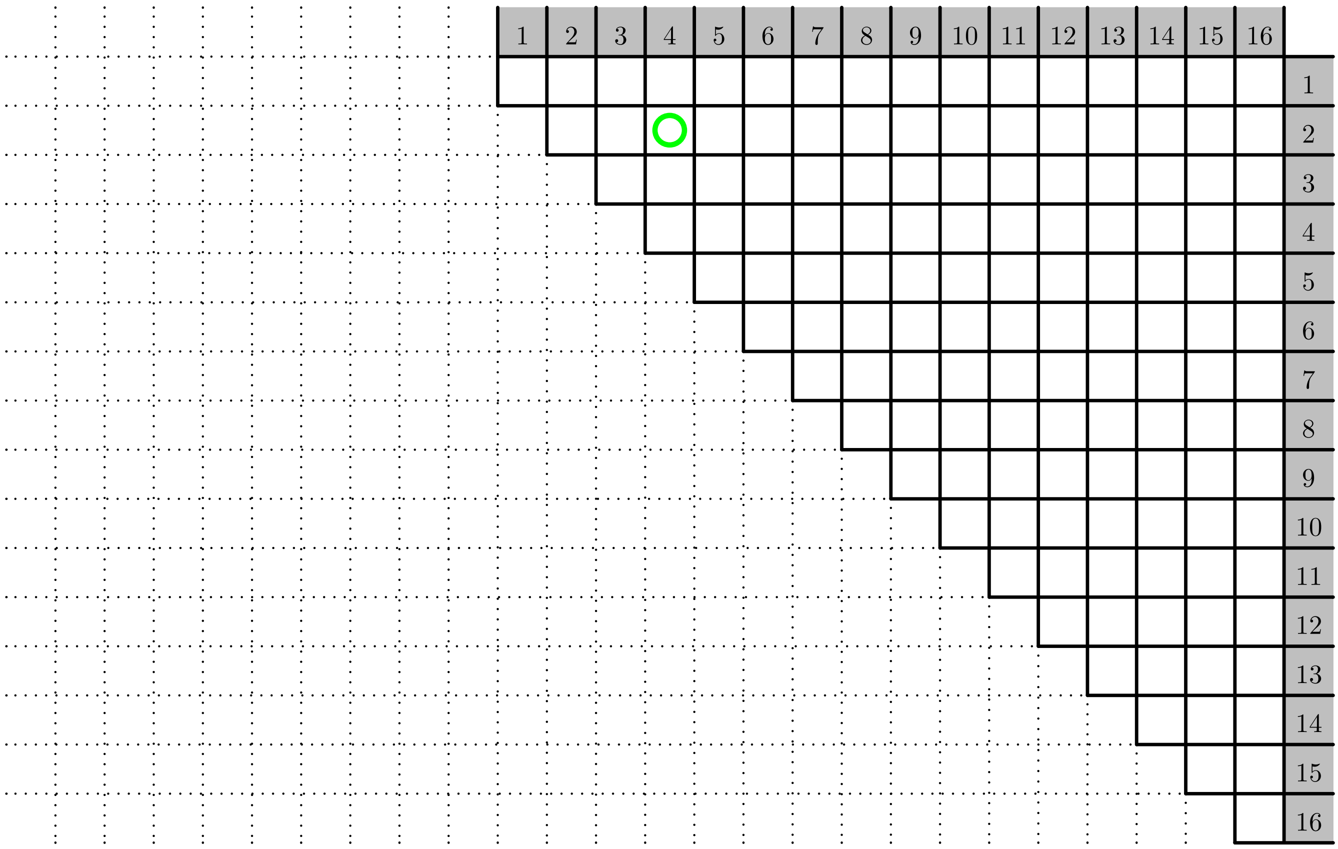


figure 2

La question est:

Pour quels rectangles $m \times n$ un pavage tatami-parfait est-il possible?



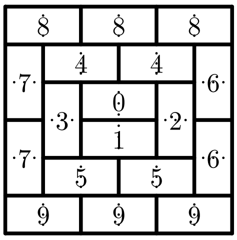
Quelques propriétés trouvées avec mes classes de 1°S:

Propriétés:

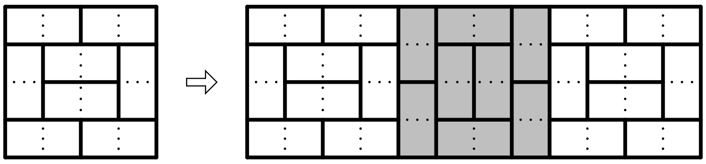
1) Si on peut recouvrir un rectangle $m \times n$ alors on peut aussi recouvrir un rectangle $n \times m$.

2) Si m et n sont impairs alors le pavage est impossible (la surface du rectangle est impaire alors qu'un pavage avec des tatamis 2×1 aura une surface paire).

3) Pour $k \in \mathbb{N}^{\star}$ les rectangles de tailles $2k \times (2k-1)$; $2k \times 2k$; $(2k+1) \times 2k$ et $(2k+2) \times 2k$ acceptent un pavage tatami-parfait. L'idée de la démonstration se voit dans la construction suivante:

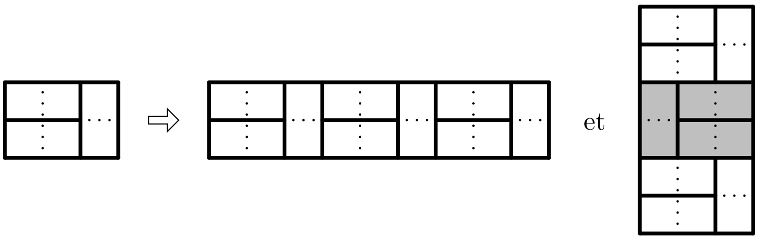


4) Pour $k \in \mathbb{N}^{\star}$, on considère le carré de $2k \times 2k$ obtenu avec la construction **3)**. Ce carré possède deux côtés opposés contenant k tatamis et ses deux autres côtés ont deux demi-tatamis dans les coins, et $k-1$ tatamis au centre. Si bien qu'on peut accoler deux de ces carrés si on fait un quart de tour à chaque fois. Donc pour $(k;a) \in (\mathbb{N}^{\star})^2$ le rectangle de taille $2ka \times 2k$ accepte un pavage tatami-parfait. Par exemple pour $(k;a) = (2;3)$ on obtient le rectangle 12×4:



5) !!!On peut aussi intercaler des bandes verticales de tatamis entre les carrés $2k \times 2k$ obtenus avec la construction **3)**, et mettre une de ces bandes aux extrémités. ainsi pour $(k;a) \in (\mathbb{N}^{\star})^2$ on peut obtenir les rectangles de taille $(2ka+k-1) \times 2k$; $(2ka+k) \times 2k$ et $(2ka+k+1) \times 2k$.

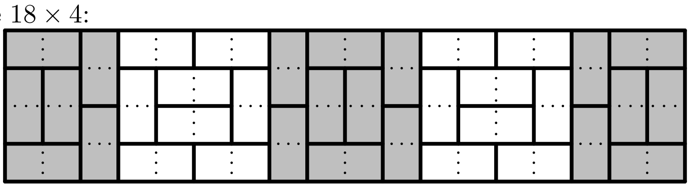
6) Pour $k \in \mathbb{N}^{\star}$, on considère le rectangle de $(2k+1) \times 2k$ obtenu avec la construction **3)**. Ce rectangle possède deux côtés de longueur paire ayant deux dispositions différentes de tatamis et deux côtés de longueur impaire ayant la même disposition de tatamis. On peut donc accoler deux de ces rectangles le long de leurs côtés de longueur paire, ou accoler ce rectangle avec son image par une symétrie centrale le long de leurs côtés de longueur impaire. Ainsi pour $(k;a) \in (\mathbb{N}^{\star})^2$ les rectangles de tailles $(2k+1)a \times 2k$ et $(2k+1) \times 2ka$ acceptent un pavage tatami parfait. Par exemple pour $(k;a) = (2;3)$ on obtient les rectangle 9×2 et 3×6:



7) De même avec le rectangle $2k \times (2k-1)$ obtenu à partir de la construction **3)**. Donc pour $(k;a) \in (\mathbb{N}^{\star})^2$ les rectangles de tailles $2ak \times (k-1)$ et $2k \times (2k-1)a$ acceptent un pavage tatami parfait.

8) A partir des propriétés précédentes on voit qu'on peut faire une bande de carrés $2k \times 2k$ et rajouter à une extrémité de cette bande un rectangle $(2k+1) \times 2k$ ou un rectangle $(2k-1) \times 2k$. Donc pour $(k;a) \in (\mathbb{N}^{\star})^2$ les rectangles de tailles $(2ka+2k+1) \times 2k$ et $(2ka+2k-1) \times 2k$ acceptent un pavage tatami parfait.

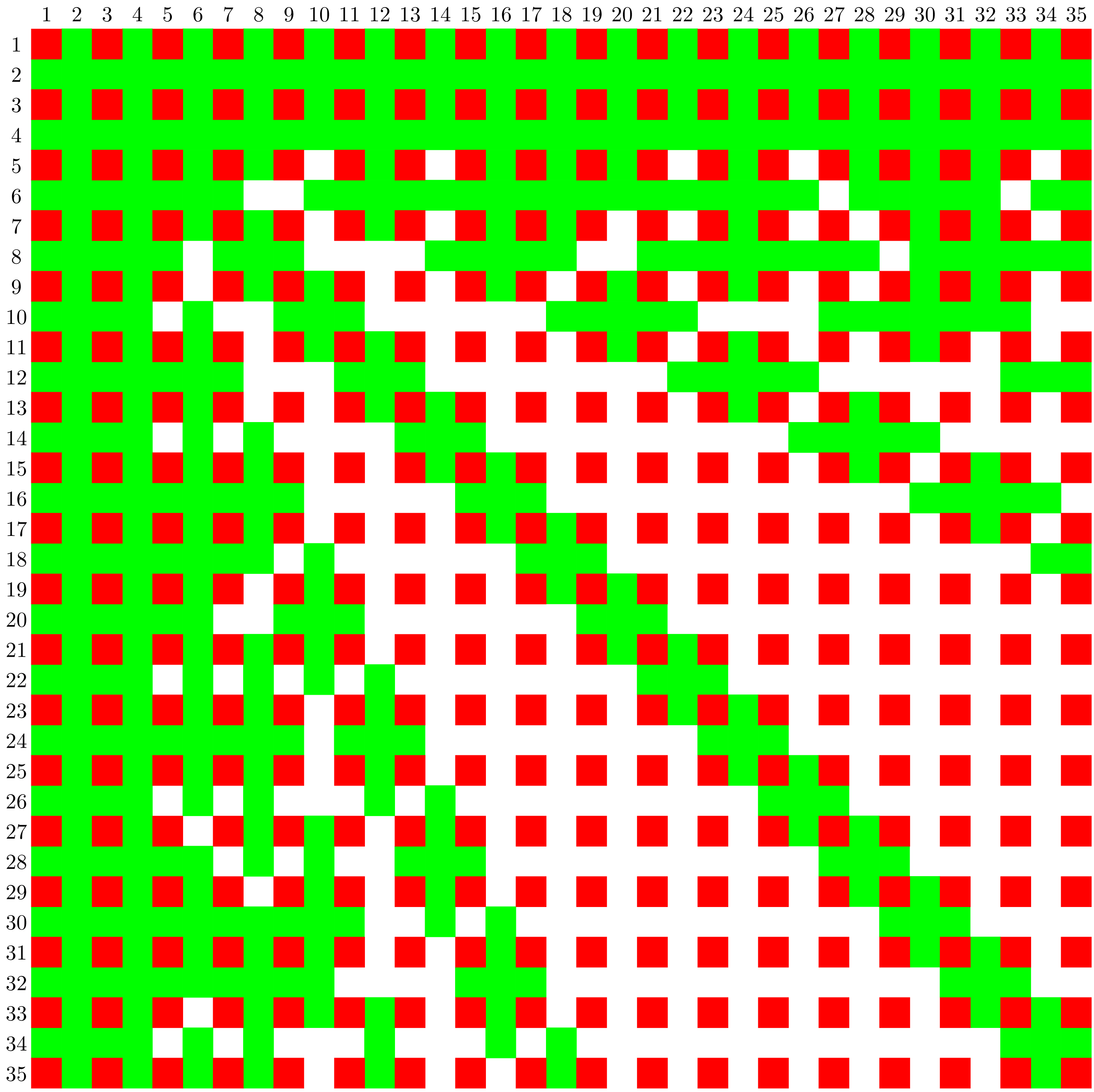
9) A partir des propriétés précédentes on voit qu'on peut faire une bande contenant un nombre impair de carrés $2k \times 2k$ et mettre aux extrémités deux rectangles $(2k+1) \times 2k$ ou deux rectangles $(2k-1) \times 2k$. Donc pour $(k;a) \in (\mathbb{N}^{\star})^2$ les rectangles de tailles $[(2a-1) \times 2k + 2 \times (2k+1)] \times 2k = [2ka+2k+2] \times 2k$ et $[(2a-1) \times 2k + 2 \times (2k-1)] \times 2k = [2ka+2k-2] \times 2k$ acceptent un pavage tatami parfait. Par exemple pour $(k;a) = (2;3)$ et en mettant des rectangles 3×4 aux extrémités on obtient le rectangle 18×4:



Quelques propriétés supplémentaires:

10) Il existe d'autres cas d'impossibilité: Par exemples les rectangles 10×7 ; 11×8 ou 14×10 n'acceptent pas de pavages tatami-parfaits (démonstration en testant tous les pavages avec un ordinateur?).

Avec ces propriétés on obtient la tableau ci-dessous (rouge: pavage tatami-parfait impossible; vert: pavage tatami-parfait possible; blanc: résultat inconnu avec ces propriétés). Comme on le voit, il reste encore beaucoup de zones à explorer.



À comparer avec les résultats donnés dans Pour La Science n°460, en page suivante.

Les résultats donnés dans Pour La Science n°460, février 2016 sont:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	1
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	2
		✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	3
			○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	4
				✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	✕	○	5
					○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	6
						✕	○	✕	✕	✕	○	✕	○	✕	○	7
							○	○	○	✕	✕	○	○	○	○	8
								✕	○	✕	✕	✕	✕	✕	○	9
									○	○	○	✕	✕	✕	✕	10
										✕	○	✕	✕	✕	✕	11
											○	○	○	✕	✕	12
												✕	○	✕	✕	13
													○	○	○	14
														✕	○	15
															○	16