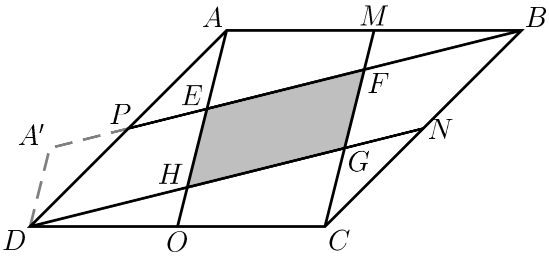
Théorème de Leclerq

Alain Brobecker, mars 2013-fév 2014

Soit $ABCD$ un parallélogramme, soient M; N; O et P les milieux respectifs de $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$ et $[DA]$. Alors le quadrilatère $EFGH$ délimité par (AO); (BP); (CM) et (DN) vérifie:

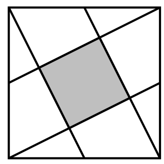
$$\boxed{\text{aire}(EFGH) = \text{aire}(ADH) = \frac{1}{5}\times \text{ aire}(ABCD)}$$



Démonstration:

• La démonstration la plus courte m'a été donnée par François Digne:
En découpant le triangle ADH et en acollant les triangles APE et $PEHD$ on obtient un parallélogramme $A'EHD$ identique au parallélogramme $EFGH$. Donc le triangle ADH a même aire que le parallélogramme $EFGH$. De même les triangles BAE, CBF et DCN ont la même aire que $EFGH$. Donc:
aire(ADH)+aire(BAE)+aire(CBF)+aire(DCN)+aire$(EFGH)$=5 ×aire$(EFGH)$=aire$(ABCD)$,
d'où aire$(EFGH)$=aire(ADH)=aire(BAE)=aire(CBF)=aire(DCN)=$\frac{1}{5}\times$ aire$(ABCD)$.

• $EFGH$ est un parallélogramme, car $(AM)//(OC)$ et $AM = OC$ impliquent $(AO)//(MC)$, donc $(EH)//(FG)$. Et de même $(EF)//(HG)$. De plus si $ABCD$ est un carré, alors $EFGH$ est aussi un carré.



• Pour ma part j'avais commis la chose suivante:
aire(AOD)+aire(BMC) = aire$(AMCO)$, c'est à dire aire$(AMCO) = \frac{1}{2}\times$ aire$(ABCD)$
Dans AHD on a $\frac{AP}{AD} = \frac{AE}{AH} = \frac{1}{2}$ d'où $AE = EH$.
Dans BAE on a $\frac{BM}{BA} = \frac{MF}{AE} = \frac{1}{2}$ d'où $MF = \frac{1}{2}\times AE$.
Par symétrie $MF = OH$, donc $OH = \frac{1}{2}\times AE$, donc $EH = \frac{2}{5}\times AO$.
Donc aire$(EFGH) = \frac{2}{5}\times$ aire$(AMCO) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times$ aire$(ABCD) = \frac{1}{5}\times$ aire$(ABCD)$.
Démonstration bien plus compliqué et je n'avais pas vu l'égalité avec l'aire du triangle ADH.

Remarques:

- Cette relation m'a été montrée par Gaëtan Leclerq, elle est probablement déjà connue, mais en attendant de connaître son nom (si elle en a un) je l'appelle Théorème de Leclerq.
- Une relation similaire existe bien sûr avec le quadrilatère délimité par (AN); (BO); (CP) et (DM).
- La relation n'est pas vraie pour tous les quadrilatères. Philippe Domergue donne un contre exemple dans le cas d'un trapèze rectangle: $A(0;0)$; $B(2;0)$; $C(2;4)$ et $D(0;2)$ pour lequel l'aire vaut 6 alors que l'aire de $EFGH$ vaut environ $1,19841 \neq \frac{1}{5}\times 6$.