**Définition:** E complet, $f : E \to E$ est contractante lorsque $\exists k < 1$ tel que $\forall (x;y) \in E^2$ on a $d(f(x);f(y)) \leqslant k \times d(x;y)$.

**Lemme:** Si $f : E \to E$ est contractante alors $f$ est continue.

**Démo:** Soit $\varepsilon > 0$ fixé, alors $\exists \alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$ tel que $\forall (x;y) \in E^2, d(x;y) < \alpha \Rightarrow d(f(x);f(y)) \leqslant k \times \alpha = \varepsilon$.

# Théorème du point fixe

**Théorème:** E complet, soit $f : E \to E$ contractante alors f admet un unique point fixe $l \in E$ tel que $f(l) = l$. De plus $\forall x_0 \in E$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $l$ et on a $d(f(u_n);l) \leqslant \dfrac{k^n}{1-k} \times d(u_0;u_1)$.

**Démo:** • Montrons que la suite définie par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est de Cauchy: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} d(u_{n+p};u_n) \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} d(u_{n+i+1};u_{n+i}) &= \sum_{i=0}^{p-1} d(f^{n+i}(u_1);f^{n+i}(u_0)) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i} \times d(u_1;u_0) = k^n \times \frac{1-k^p}{1-k} \times d(u_1;u_0) \\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k} \times d(u_1;u_0) \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 indépendamment de $p$, donc $(u_n)$ est de Cauchy, donc converge vers $l \in E$.
• $f$ contractante, donc continue, donc $f(l) = f(\lim\limits_{n\to\infty} u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = l$.
• Unicité: Si $l$ et $l'$ sont deux points fixes alors $d(f(l);f(l')) = d(l;l') \leqslant k \times d(l;l')$ avec $k < 1$, donc $d(l;l') = 0$, donc $l = l'$.

**Propriétés-définitions-démonstrations:**
Soit $I$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ ayant $l$ comme point fixe, et $(u_n)$ définie comme ci-dessus.

(i) Si $|f'(l)| < 1$ alors $\exists k > 0$ tel que $|f'(l)| < k < 1$ et $f'$ continue implique $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{B}(l;\varepsilon)$ on a $|f'(x)| < k$. Donc si $u_0 \in \mathcal{B}(l;\varepsilon)$ on a $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ et $|u_n - l| \leqslant k^n \times |u_0 - l|$.
$l$ est appelé point fixe attractif.

(ii) Si de plus $|f'(l)| = 0$ et que $f$ est $\mathcal{C}^2$ on a $|u_n - l| \leqslant \dfrac{2}{M} \times \left(\dfrac{M}{2} \times |u_0 - l|\right)^{2^n}$ avec $M = \sup_{x\in I} |f''(x)|$, car d'après le théorème de Taylor Lagrange $\exists c \in ]l;x[$ tel que $f(x) = f(l) + (x-l)f'(l) + \dfrac{(x-l)^2}{2!} \times f''(c) = f(l) + \dfrac{(x-l)^2}{2!} \times f''(c)$ donc $|f(x) - l| \leqslant \dfrac{M}{2} \times |x - l|^2$ donc $\dfrac{M}{2} \times |f(x) - l| \leqslant \left(\dfrac{M}{2} \times |x - l|\right)^2$.
$l$ est appelé point fixe super attractif.

(iii) Si $|f'(l)| > 1$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{B}(l;\varepsilon) \setminus \{l\}$ on a $|f(x) - l| > |x - l|$. Donc les $u_n$ s'éloignent de $l$ tant qu'ils sont dans $\mathcal{B}(l;\varepsilon) \setminus \{l\}$.
$l$ est appelé point fixe répulsif.
Toutefois il existe un voisinage de $l$ sur lequel $f'$ est de signe constant, donc $f$ est strictement monotone et $f^{-1}$ existe sur ce voisinage, et $(f^{-1})'(l) = \dfrac{1}{f'(l)}$ donc $l$ est attractif pour $f^{-1}$.

(iv) Si $|f'(l)| = 1$ on ne peut rien dire sur le comportement de $(u_n)$. Par exemple avec $f(x) = \sin(x)$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ la suite $(u_n)$ converge vers 0, alors que pour $f(x) = \sinh(x)$ sur $\mathbb{R}$ la suite $(u_n)$ ne converge pas.
$l$ est appelé point fixe indifférent.

**Application: méthode d'approximation de Newton-Raphson**
Soit $\phi \in \mathcal{C}^2$ ayant une seule racine $r$ sur $]a;b[$ et telle que $\forall x \in [a;b]$ on ait $\phi'(x) \neq 0$. Chercher sa racine $r$ revient à chercher le point fixe de $f(x) = x - \dfrac{\phi(x)}{\phi'(x)}$ qui est $\mathcal{C}^1$. Comme $f'(r) = \dfrac{\phi(r)\phi''(r)}{\phi'(r)^2} = 0$ alors $r$ est point fixe super attractif.
On commence donc par prendre $u_0$ suffisamment proche de $r$ pour se trouver sur un intervalle ou $f$ est contractante (étude de $f$ et utilisation de minorations/majorations, dichotomie...), la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge alors rapidement vers $r$.

**Exemple: méthode de Héron d'Alexandrie (ou de Babylone) pour le calcul de $\sqrt{A}$**
Soit $A > 1$ donné, $\sqrt{A}$ est la racine de $x^2 - A$ donc c'est aussi le point fixe de $f(x) = x - \dfrac{x^2 - A}{2x} = \dfrac{1}{2} \times \left(x + \dfrac{A}{x}\right)$. On a $f'(\sqrt{A}) = 0$ donc $\sqrt{A}$ est super attractif.