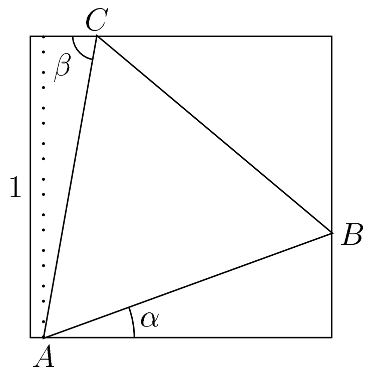
Recherche du plus grand triangle équilatéral inscrit dans un carré

Alain Brobecker, mars 2013

Cette question s'est posée en réalisant un puzzle en bois qui devait utiliser trois types de figures: des carrés, des disques et des triangles équilatéraux, à placer dans des cases carrées de même taille.

I. Cas non optimal: Aucun sommet du triangle n'est un sommet du carré

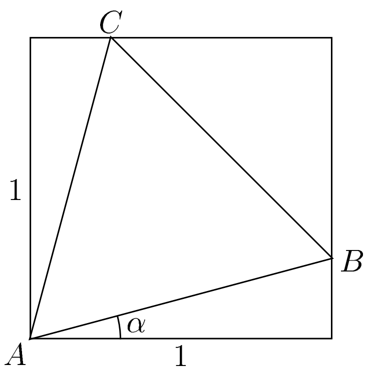


On peut se convaincre que ce cas de figure n'est pas optimal: si on déplace horizontalement le triangle ABC jusqu'à ce que le point A soit sur le sommet inférieur gauche du carré, on peut alors agrandir le côté du triangle équilatéral en effectuant une légère rotation.
Voici néanmoins quelques valeurs trouvées dans ce cas de figure, pour le carré unité:

$$AB = \frac{1}{\sin(\beta)} = \frac{1}{\sin(\alpha + 60^o)} \qquad x_A = 1 - AB \times \cos(\alpha)$$

$$y_B = AB \times \sin(\alpha) \qquad x_C = x_A + AB \times \cos(\alpha + 60^o)$$

II. Cas optimal: Un sommet du triangle coïncide avec un sommet du carré



Si on suppose que B est mobile sur le côté droit du carré, le triangle sera inscrit et le plus grand possible lorsque le point C sera exactement sur le côté haut du carré.
On a donc:

$$AB = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

Et on veut que:

$$y_C = AB \times \cos(30^o - \alpha) = 1$$
$$\iff \cos(\alpha) = \cos(30^o - \alpha)$$
$$\iff \alpha = 15^o$$

Le triangle équilatéral le plus grand que l'on peut inscrire dans le carré unité a donc un côté valant:

$$AB = \frac{1}{\cos(15^o)} \simeq 1,035$$

Cette valeur étant très peu différente de 1, et pour éviter tout blocage d'un triangle dans le puzzle, autant prendre un triangle équilatéral de côté 1.