Les nombres bons

J. Mathevet - Janvier 2003

La définition des nombres bons aurait été publiée dans la revue Tangente, mais j'en ai d'abord entendu parler dans la liste de diffusion de maths de l'académie d'Amiens. Ce que je vais raconter dans ce document peut avoir été dit ailleurs mais j'avais envie de partager des découvertes que j'ai pu faire sur les nombres bons et éventuellement avoir un retour d'informations.

Tout d'abord, définissons ce qu'est un nombre bon: "Un nombre entier est dit bon s'il est somme d'entiers dont la somme des inverses fait 1". On appelera nombre mauvais tous les autres.

Après avoir réfléchi un peu et compris cette définition, on trouve facilement quelques nombres bons:

1 est bon car son inverse fait 1.

4 est bon car 4 = 2 + 2 et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Enfin, on constate que $\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = 1$ (n fois $\frac{1}{n}$) donc n+n+...+n = n^2 est bon (n fois n). On obtient donc une premiere propriété:

<u>Propriété</u>: Pour tout n entier non nul, n^2 est bon.

Cette propriété est intéressante à deux titres: d'abord cela prouve qu'il existe une infinité de nombres bons. D'autre part, on obtient ainsi ce qu'on appelle un générateur de nombres bons. À partir d'un générateur et d'une plage de nombres entiers (un tableau contenant tous les entiers entre deux bornes données), on peut appliquer une technique de crible. On coche tous les nombres du tableau qui sont bons, par contre ceux qui ne sont pas cochés ne sont pas forcément mauvais (contrairement au crible d'Ératosthène où les nombres non multiples sont premiers). J'appelle nombres pseudo-mauvais les nombres non-cochés par une technique de crible (du coup cette 'définition' dépend du générateur utilisé).

Avoir un générateur de nombres bons aussi fin que possible permettrait de n'étudier dans le détail qu'un minimum de pseudo-mauvais (l'algorithme permettant de tester si un nombre est bon ou mauvais n'est d'ailleurs pas très évident et pourrait être travaillé - j'en propose une implémentation récursive en BBC BASIC sur mon site web).

<u>Propriété 2 (Générateur Brobecker):</u>
Si n est bon, alors pour tout m entier non nul m×(m+n-1) est bon

<u>Preuve:</u> Soit n un nombre bon alors n = $n_1+\ldots+n_k$ et $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = 1$

$\left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m} \times \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i}\right) = 1$ car n est bon donc m(m-1)+m×n = m(m+n-1) est bon

La propriété est très efficace car sur les entiers de 1 à 1000, il coche 516 bons entiers. Pour obtenir ce résultat, on part de 1 qui est bon et on coche tous les m^2 non nuls, puis on cherche le plus petit bon>1, c'est à-dire 4, on coche tous les m×(m+3) où m≠0, etc... Ceci est loin d'être le cas du générateur par carrés qui n'en coche que 31.

Propriété 3: Pour tout m entier non nul, et a_1 à a_m m entiers non nuls, $m\times((a_1)^2+...+(a_m)^2)$ est bon.

Preuve: $1 = m\times\frac{1}{m} = \frac{1}{m} + ... + \frac{1}{m} = \frac{a_1}{a_1 * m} +...+\frac{a_m}{a_m*m}$ donc $m\times a_1\times a_1+...+m\times a_m\times a_m$ est bon

Cette propriété semble assez intéressante à priori, mais elle est assez délicate à mettre en oeuvre et est moins efficace que le générateur Brobecker.

Propriété 4: Si m et n sont deux nombres bons, alors $m\times n$ est bon

Preuve: $m=m_1+....+m_k$ et $\sum_{i=1}^{i=k}\frac{1}{mi} = 1$

$n=n_1+...+n_{k'}$ et $\sum_{i=1}^{i=k'}\frac{1}{ni} = 1$

donc $(\sum_{i=1}^{i=k}\frac{1}{mi})\times(\sum_{i=1}^{i=k'}\frac{1}{ni}) = 1 \times 1 = 1$

donc $\sum_{1 \leqslant i \leqslant k \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant k'} (m_i \times n_j)$ est bon

càd $(m_1+...+m_k)(n_1+...+n_{k'}) = m\times n$ est bon

Par ailleurs, on peut remarquer que 4 est bon, 3 est mauvais et 12 est mauvais. Par conséquent, le produit d'un bon par un mauvais peut être mauvais. Comme 2 est mauvais et 4 est bon, le produit de deux mauvais peut néanmoins donner un bon.

La propriété 4 semble particulièrement intéressante à priori, malheureusement son efficacité reste limitée. Après avoir fait tourner la prop 2 sur les entiers de 1 à 1000, et coché 516 bons entiers, l'utilisation de ce théorème n'ajoute que 10 nouveaux bons entiers.

Heureusement, en généralisant la preuve de la propriété 2, on arrive à un générateur multi-variables qui englobe tous les générateurs présentés jusqu'ici (et c'est le plus général que j'ai vu à ce jour) !

Propriété 5: Soit m un entier non nul et n_1 à n_m m bons entiers. Alors $m\times(n_1+...+n_m)$ est bon.

Preuve: La démonstration consiste à reprendre la preuve de la propriété 2 et de multiplier chaque terme $\frac{1}{m}$ par une somme d'inverses faisant 1 (la somme des dénominateurs faisant chaque nombre bon n_i), au lieu de le faire juste une fois pour le générateur Brobecker. Comme c'est très formel et que cela n'apporte rien de mieux que la preuve d'origine, je ne reproduis pas cette démonstration ici.

Conséquence: Avec n_1 à n_m égaux à 1, on obtient la propriété 1.

Avec n_1 à n_{m-1} égaux à 1 et n_m bon on obtient le générateur Brobecker.

Avec n_1 à n_m égaux à des carrés non nuls, on obtient le premier générateur multivariable (propriété 3).

Remarque 1: Ce super-génerateur pose plusieurs problèmes. D'abord, l'implémentation machine de cette prop est délicate (implique un nombre de boucles imbriquées virtuellement infini). Par ailleurs, l'efficacité de ce théorème décroît assez rapidement (on augmente petit à petit le nombre de variables, il y a de plus en plus de nombres à cocher tandis qu'il y a de moins en moins de nouveaux nombres bons).

Remarque 2: Ce super-générateur ne coche pas pour autant tous les nombres bons. Par exemple, 11 est bon (2+3+6) mais n'est pas atteint par la propriété 5. L'efficacité de ce générateur est quand même assez bonne. En faisant tourner successivement la propriété 2, le produit de nombres bons, cocher les bons entiers de la forme 2*somme de deux entiers bons enlève 31 nouveaux bons entiers et cocher ceux de de la forme 3*somme de trois entiers bons en enlève 131 de plus.

Remarque 3: Si m est composé, et k un diviseur de m, alors m fois la somme la somme de m nombres bons est égal à k fois la somme de k nombres bons.
En effet, si m = k×l et soit pour tout i de [1..m] n_i un bon entier, alors
$P = m\times\sum_{i=1}^{m} n_i = k\times l\times\sum_{i=1}^{k\times l} n_i = k \times l \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} n(i,j)\right)$ où $n(i,j) = n_{k\times(j-1)+i}$ est bon
$P = k \times \sum_{i=1}^{k}\left(l \times \sum_{j=1}^{l} n(i,j)\right)$
Or $l \times \sum_{j=1}^{l} n(i,j)$ est bon par la propriété 5 donc P est de la forme k fois la somme de k nombres bons.

Une des conséquences de la propriété 5, c'est que cribler avec le supergénérateur n'est intéressant qu'en prenant des nombres premiers pour valeur de m (Tiens donc, un lien avec les nombres premiers !).

En faisant tourner les divers cribles et en finissant le reste par une exploration exhaustive informatique, on obtient la liste suivante de nombres mauvais: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19, 21, 23.

Y'a t'il d'autres nombres mauvais ? Le programme indique que les entiers de 24 à 500 sont tous bons. On est tenté de penser que tous les entiers supérieurs ou égaux à 24 sont bons. Et en fait c'est le cas, mais avant de démontrer ce théorème, nous avons besoin de deux propriétés fondamentales (dues à Jean Moreau de St Martin dans Quadrature no 4):

Lemme: Si n est bon alors 2(n+1) et 2n+9 sont bons.

Preuve: La première prop est un corollaire de la prop 5. La deuxième au fait que:
$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i} = 1$ car n est bon de décomposition $n_1 + \cdots + n_k$

Maintenant, nous avons tous les éléments pour démontrer le théorème:

Théorème: Tous les entiers supérieurs ou égaux à 24 sont bons.

Preuve:
Soit l'hypothèse de récurrence forte Hyp(k):«Pour tout n appartenant à [24..60+k] n est bon »
Il est clair que Hyp(0) est vraie (voir annexe). Supposons que l'hypothèse soit vraie au rang k.
Alors deux cas de figure sont possibles:

- si 60+k+1 est pair alors $N = \frac{60+k+1}{2} - 1$ est un entier et 24 ⩽ N ⩽ 60+k car k est positif.

Donc N est bon par hypothèse de récurrence donc 2(N+1) = 60+k+1 est bon donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang k+1.

- Si 60+k+1 est impair alors $M = \frac{60+k+1-9}{2}$ est un entier et 24 ⩽ M ⩽ 60+k donc M est bon par hypothèse de récurrence et 2M+9 = 60+k+1 est bon. Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang k+1.

Par suite, tous les entiers supérieurs ou égaux à 24 sont bons.

Extensions possibles: On peut chercher à imposer une contrainte plus forte sur les décompositions permises pour qu'un nombre soit bon, par exemple tous les entiers de la décomposition pourraient être distincts. Le résultat est alors similaire: à partir d'un certain rang, tous les nombres sont distinctement-bons.

Annexe - Décomposition des nombres bons entre 1 et 60

Toutes les décompositions ci-dessous admettent le moins de termes possibles (Merci à Alain Brobecker pour le programme fournissant ces résultats).

1 = 1
4 = 2+2
9 = 3+3+3
10 = 2+4+4
11 = 2+3+6
16 = 4+4+4+4
17 = 3+4+4+6
18 = 3+3+6+6
20 = 2+6+6+6
22 = 2+4+8+8
24 = 2+4+6+12
25 = 5+5+5+5+5
26 = 4+4+6+6+6
27 = 3+6+6+6+6
28 = 4+4+4+8+8
29 = 2+3+12+12
30 = 2+3+10+15
31 = 2+4+5+20
32 = 2+3+9+18
33 = 3+3+9+9+9
34 = 2+8+8+8+8
35 = 2+6+9+9+9
36 = 2+6+8+8+12
37 = 2+3+8+24
38 = 2+6+6+12+12
39 = 2+6+6+10+15
40 = 4+4+8+8+8+8
41 = 2+6+6+9+18
42 = 2+4+12+12+12
43 = 2+4+10+12+15
44 = 3+3+6+8+24
45 = 2+4+9+12+18
46 = 2+4+8+16+16
47 = 3+4+8+8+12+12
48 = 3+4+8+8+10+15
49 = 3+4+6+12+12+12
50 = 2+4+8+12+24
51 = 3+3+5+10+30
52 = 2+5+5+20+20
53 = 2+5+6+10+30
54 = 2+3+7+42
55 = 2+4+7+14+28
56 = 2+6+12+12+12+12
57 = 2+5+5+15+30
58 = 2+6+10+10+15+15
59 = 2+3+18+18+18
60 = 2+3+15+20+20