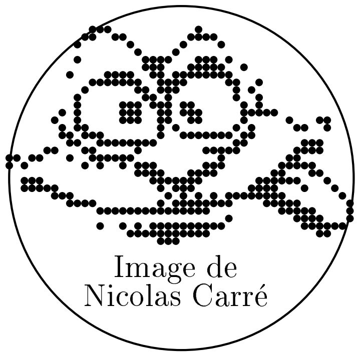
Disque englobant un nuage de points

Alain Brobecker, avec l'aide de Philippe Domergue, janvier 2008

Étant donné un nuage fini de points du plan, comment trouver le centre et le rayon du disque fermé d'aire minimale englobant ce nuage de points?



Le problème a une forte connotation statistique, mais la question pourrait aussi se poser en traitement d'image pour rechercher le contour d'un œil ou d'une planète.
Dans $\mathbb{R}^3$, on peut rechercher de manière similaire la boule fermée de volume minimal englobant un nuage fini de points. Un exemple pratique vient alors des techniques de synthèse d'images: Si une scène virtuelle contient 1000 arbres constitués chacun de 1000 polygones, pour chaque rayon entre l'œil et un point de l'écran (pixel) il faudra tester 1000×1000 intersections du rayon avec un polygone pour savoir lequel sera rencontré en premier et donc à afficher. Si on multiplie ces tests par le million de pixels d'une image 1280×1024, on obtient vite des nombres faramineux. Par contre, si on englobe chaque arbre dans une "sphère englobante", on peut tester au préalable les intersections avec ces 1000 sphères, puis tester plus finement les intersections du rayon avec les polygones des arbres contenus dans les sphères touchées.

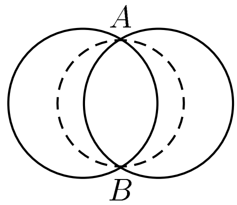
Notations:
On supposera que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis des distances usuelles. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\{P_i \in \mathbb{R}^2 \ / \ i \in [0;N]\}$ un nuage fini de points. On supposera que les points sont deux à deux distincts, c'est à dire $\forall (i;j) \in [0;N]^2 \ , \ P_i \neq P_j$.

Propriété 1: Existence et unicité du disque fermé d'aire minimale.
Il existe un unique disque fermé englobant tous les points du nuage, et tel que pour tout disque fermé de rayon strictement inférieur ou de centre différent, un des points du nuage est à l'extérieur de cet autre disque. Plus précisément:
$\exists ! R \in \mathbb{R}_+ \ , \ \exists ! \Omega \in \mathbb{R}^2 \ , \ \forall i \in [0;N] \ , \ dist(\Omega;P_i) \leqslant R$
et $\forall r \in \mathbb{R}_+ \ , \ \forall \omega \in \mathbb{R}^2 \ , \ r < R \Rightarrow \ (\ \exists i \in [0;N] \ , \ dist(\omega;P_i) > r \ )$.

Démonstration:
• Existence et unicité du rayon: Soit $E = \{r \in \mathbb{R}_+ \ / \ \exists \Omega \in \mathbb{R}^2 \ , \ \forall i \in [0;N] \ , \ dist(\Omega;P_i) \leqslant r\}$. $E \neq \emptyset$ car $r_0 = max\{dist(P_0;P_i) \ / \ i \in [0;N]\} \in E$ en prenant $\Omega = P_0$. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0, elle admet donc une unique borne inférieure R.
• Existence du centre en montrant que la borne inférieure est atteinte: On a $\forall r \in E \ , \ r \geqslant R$ ainsi que $\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists r \in E \ , \ r < R + \varepsilon$. On peut donc construire une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ de premier terme r_0, strictement décroissante et convergeant vers R.

La suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ qui lui est associée est entièrement contenue dans le compact $\overline{boule(P_0;r_0)}$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n < r_0$ et $P_0 \in \overline{boule(\Omega_n;r_n)}$. D'après le théorème de Bolzano Weierstraß la suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence, on peut donc en extraire une sous suite $(\Omega_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\Omega \in \overline{boule(P_0;r_0)}$.
Posons $R' = max\{dist(\Omega;P_i)\ /\ i \in [0;N]\} \in E$ qui existe car le nuage de points est fini. On a $R \leqslant R'$ sinon R ne serait pas la borne inférieure de E. De plus $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $r_{\varphi(n)} < R + \frac{\varepsilon}{2}$ et $dist(\Omega;\Omega_{\varphi(n)}) < \frac{\varepsilon}{2}$, et comme d'après l'inégalité triangulaire on a $\forall i \in [0;N]$, $dist(\Omega;P_i) \leqslant dist(\Omega;\Omega_{\varphi(n)}) + dist(\Omega_{\varphi(n)};P_i)$ alors $R' \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + r_{\varphi(n)}$.
On a donc $\forall\varepsilon > 0$, $R \leqslant R' < R + \varepsilon$, et finalement $R = R' \in E$.

• Unicité du centre: S'il existe deux disques distincts d'aires minimales englobant le nuage de points, alors les frontières de ces deux disques se coupent en exactement deux points distincts A et B qui vérifient $dist(A;B) < 2 \times R$. Par ailleurs le disque fermé de diamètre $[AB]$ inclut l'intersection des deux disques, qui elle même inclut le nuage de points. Cela contredit le fait que R est le plus petit rayon englobant, donc le disque d'aire minimale est unique.

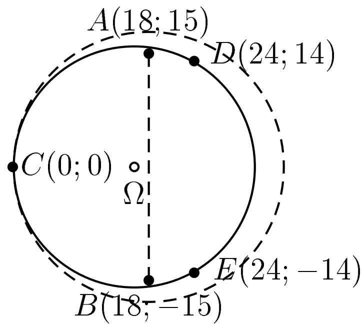


Remarque:
L'unicité du centre n'est pas forcément vraie si l'on prend une autre distance de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 2:
Le diamètre d'un disque englobant un nuage de point est supérieur ou égal à la plus grande distance que l'on peut trouver entre deux points du nuage. C'est en particulier vrai pour le disque d'aire minimale.

Démonstration:
D'après l'inégalité triangulaire on a $\forall(i;j) \in [0;N]^2$, $dist(P_i;P_j) \leqslant dist(P_i;\Omega) + dist(\Omega;P_j) \leqslant R + R$. Cette inégalité est aussi vraie pour la plus grande distance.

Remarque:
Il faut noter que, même dans le cas du disque d'aire minimale, il n'y a pas forcément égalité: le diamètre de ce disque peut être supérieur à la plus grande distance entre deux points du nuage. Sur l'exemple ci-contre, le segment $[AB]$ est celui ayant la plus grande distance. Pourtant ni A, ni B ne sont sur la frontière du disque d'aire minimale.



Propriété 3:
Si un disque fermé d'aire minimale contient un nuage fini de points alors au moins deux points du nuage sont sur la frontière du disque.

Démonstration:
Supposons qu'il n'y ait aucun point du nuage sur la frontière du disque, alors $\forall i \in [0;N]$, $dist(\Omega;P_i) < R$. Si on pose $R' = max\{dist(\Omega;P_i)\ /\ i \in [0;N]\}$ alors $R' < R$ et $disque(\Omega;R')$ contient tous les points, ce qui contredit que R est minimal. Donc il y a au moins un point du nuage sur la frontière du disque.
Supposons maintenant qu'il n'y ait qu'un point P_a du nuage sur la frontière du disque. En prenant $R' = max\{dist(\Omega;P_i)\ /\ i \in [0;N]\ ,\ i \neq a\}$ on a $R' < R$. Posons $\omega \in [\Omega P_a]$ avec

$dist(\Omega;\omega) = \frac{R-R'}{2}$. On a alors $dist(\omega;P_a) = R - \frac{R-R'}{2} = \frac{R+R'}{2} < R$ et d'après l'inégalité triangulaire $\forall i \in [0;N]\ ,\ i \neq a \Rightarrow\ (\ dist(\omega;P_i) \leqslant dist(\omega;\Omega) + dist(\Omega;P_i) \leqslant \frac{R-R'}{2} + R' = \frac{R+R'}{2} < R\ )$. Donc $\forall i \in [0;N]\ ,\ dist(\omega;P_i) < R$ ce qui contredit le fait que R est minimal. Donc il y a au moins deux points du nuage sur la frontière du disque.

Propriété 4:
Si un disque fermé d'aire minimale contient un nuage fini de points et si la frontière de ce disque contient exactement deux points distincts P_a et P_b, alors ces deux points sont diamétralement opposés et $dist(P_a;P_b) = max\{dist(P_i;P_j)\ /\ (i;j) \in [0;N]^2\} = 2 \times R$.

Démonstration:
Soit $R' = max\{dist(\Omega;P_i)\ /\ i \in [0;N]\ ,\ i \neq a\ ,\ i \neq b\} < R$. Si les points ne sont pas diamétralement opposés, on pose $M = milieu[P_aP_b]$ et $\omega \in [\Omega M]$ avec $dist(\Omega;\omega) = \frac{R-R'}{2}$. Alors, de même que dans la démonstration précédente on aboutira à une contradiction. Donc les points P_a et P_b sont diamétralement opposés. On a $dist(P_a;P_b) = 2 \times R \leqslant max\{dist(P_i;P_j)\ /\ (i;j) \in [0;N]^2\}$ et ce dernier terme est plus petit ou égal à $2 \times R$ d'après la propriété 2, d'où l'égalité.

Algorithme:
On peut maintenant donner un algorithme permettant de trouver le rayon et le centre du disque d'aire minimale englobant le nuage de points:
• Chercher deux points P_a et P_b de distance maximale dans le nuage. Si le disque de diamètre $[P_aP_b]$ contient tous les autres points, alors d'après la propriété 2 et l'unicité, c'est le disque d'aire minimale englobant le nuage.
• Sinon on a $N > 2$ et au moins trois points du nuage sont sur la frontière du disque (s'il n'y en avait que 2 on serait dans le cas de la propriété 4 qui aurait été traité dans l'étape précédente). Alors pour tous les triplets de points non alignés $(P_a;P_b;P_c)$ du nuage, càd $\forall(a;b;c) \in [0;N-2]\times]a;N-1]\times]b;N]$ tels que $det(\overrightarrow{P_aP_b};\overrightarrow{P_bP_c}) \neq 0$, rechercher $\omega_{(a;b;c)}$ le centre du cercle circonscrit à ces trois points, qui se trouve à l'intersection des médiatrices, et le rayon $r_{(a;b;c)} = max\{dist(\omega_{(a;b;c)};P_i)\ /\ i \in [0;N]\}$. Le disque d'aire minimale englobant le nuage sera donné par $R = min\{r_{(a;b;c)}\}$ et Ω le centre associé.

Questions en suspens:
• La propriété 3 se montre par récurrence pour $\mathbb{R}^n$? Elle s'énonce: Si une boule fermée de rayon minimal contient un nuage fini de points alors au moins n points du nuage sont sur la frontière de la boule.
• L'algorithme contiendra davantage d'étapes pour $\mathbb{R}^n$. Il faudra étudier le cas d'une boule contenant exactement 2 points, puis 3 points non alignés, puis 4 points non coplanaires, ..., puis $n+1$ points n'appartenant pas à un sous espace de dimension $n-1$?
• L'algorithme est lent, car les instructions les plus imbriquées sont exécutées environ N^4 fois. Pour accélérer on peut chercher les sommets de l'enveloppe convexe du nuage et montrer qu'eux seuls peuvent être sur la frontière du disque d'aire minimale.
• Si on appelle A et B les points les plus éloignés du nuage, on pourrait vouloir gagner du temps en prenant le cercle de centre $O = milieu[AB]$ et de rayon $r = max\{dist(O;P_i)\ /\ i \in [0;N]\}$. Mais avec l'exemple de la remarque de la propriété 2 le rapport des aires vaut $r^2 \div R^2 = 18^2 \div 16^2 \simeq 1,27$. En rapprochant A et B des points D et E on peut même augmenter ce rapport vers $1,5^2 = 2,25$. L'approximation peut donc être très mauvaise.
• De manière plus générale, on pourrait chercher l'ellipse d'aire minimale englobant un nuage de points (la projection en perspective d'un cercle est parfois une ellipse).

Programme C:

```
/* disque.c - Alain Brobecker */
/* Recherche le disque d'aire minimale englobant un nuage de points */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int main() {
    int i,j,k,l,a,b,TousLesPointsDansLeCercle;
    float d2,d2max,x0min,y0min,r2min,det,x0,y0,temp;
    int n=5;
    float x[n]={0.0 , 1.8, 2.4, 2.4, 1.8 };
    float y[n]={1.5 , 3.0, 2.9, 0.1, 0.0 };
    /* Recherche les points A et B étant à une distance max */
    a=0; b=0;
    d2max=0;
    for(i=0;i<n-1;i++) {
        for(j=i+1;j<n;j++) {
            d2=(x[i]-x[j])*(x[i]-x[j])+(y[i]-y[j])*(y[i]-y[j]);
            if(d2>d2max) {
                a=i; b=j;
                d2max=d2;
            }
        }
    }
    /* Le disque de diamètre [AB] est-il minimal? */
    x0min=(x[a]+x[b])/2; y0min=(y[a]+y[b])/2;
    r2min=d2max/4;
    TousLesPointsDansLeCercle=1;
    i=0;
    while((i<n) && (TousLesPointsDansLeCercle==1)) {
        d2=(x[i]-x0min)*(x[i]-x0min)+(y[i]-y0min)*(y[i]-y0min);
        if(d2>r2min) { TousLesPointsDansLeCercle=0; }
        i++;
    }
    /* Sinon on recherche, pour chaque triplet de points, le centre du cercle circonscrit et on regarde
       le rayon qu'il faudra prendre pour englober tous les points. Le plus petit sera le disque minimal. */
    if(TousLesPointsDansLeCercle==0) {
        r2min=d2max; /* on commence avec rayon = distance max, qui diminuera */
        for(i=0;i<n-2;i++) {
            for(j=i+1;j<n-1;j++) {
                for(k=j+1;k<n;k++) {
                    /* Les points sont non alignés lorsque det(IJ;IK)!=0 */
                    det=(x[j]-x[i])*(y[k]-y[i])-(x[k]-x[i])*(y[j]-y[i]);
                    if(det!=0) {
                        /* Recherche les coordonnées du centre du cercle circonscrit */
                        temp=(x[k]-x[i])*(x[k]-x[j])+(y[k]-y[i])*(y[k]-y[j]);
                        x0=(x[i]+x[j]-temp*(y[j]-y[i])/det)/2;
                        y0=(y[i]+y[j]+temp*(x[j]-x[i])/det)/2;
                        /* Recherche dist max entre ce centre et un point du nuage */
                        d2max=0;
                        for(l=0;l<n;l++) {
                            d2=(x[l]-x0)*(x[l]-x0)+(y[l]-y0)*(y[l]-y0);
                            if(d2>d2max) { d2max=d2; }
                        }
                        /* Plus petit que rayon min? Alors c'est le nouveau candidat */
                        if(d2max<r2min) {
                            r2min=d2max;
                            x0min=x0;
                            y0min=y0;
                        } /* endif */
                    } /* endif */
                } /* next k */
            } /* next j */
        } /* next i*/
    }
    /* Ici on a x0min, y0min et r2min ok */
    printf("Disque de centre (%f,%f) et de rayon %f.",x0min,y0min,sqrt(r2min));
    exit(0);
}
```