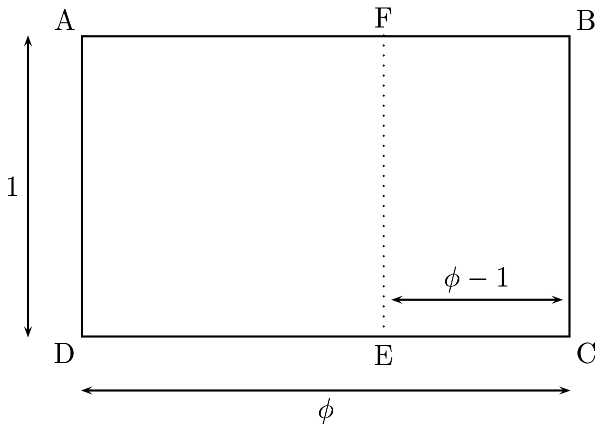
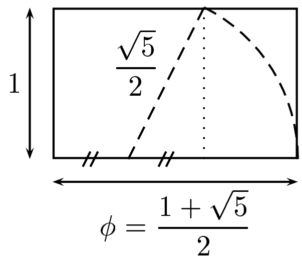
Le nombre d'or

Florian Bonnet et Alain Brobecker

Une définition possible du nombre d'or: c'est le rapport entre la longueur et la largeur d'un rectangle qui, lorsqu'on lui enlève un carré de côté sa largeur, donne un rectangle de même proportion. Le nombre d'or est noté ϕ et vaut environ 1,618...



AFED est un carré. Les rectangles ABCD et BCEF ont les mêmes proportions.



Calcul de la valeur du nombre d'or:

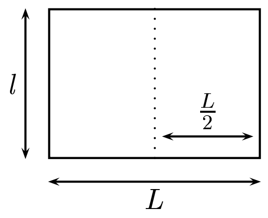
Pour que les rectangles ABCD et BCEF aient les mêmes proportions, il faut:

$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BF}$ ce qui équivaut à $\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1} \iff \phi \times (\phi - 1) = 1 \iff \phi^2 - \phi - 1 = 0$

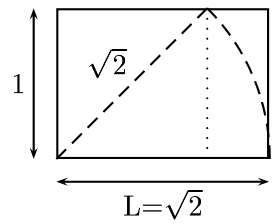
La seule solution positive est $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618...$

Le nombre d'or apparait de manière naturelle dans un pentagone régulier (⬠), dans le dodécaèdre et l'icosaèdre, dans les spirales de certaines fleurs parait-il... Mais il ne faut pas y voir une quelconque étrangeté mystique (passons aussi sur les prétentions esthétiques), d'autres nombres apparaissent bien plus fréquemment dans la nature ou dans les constructions humaines:

- le 2 apparait à cause des symétries naturelles (2 yeux, 2 oreilles...), dans les 2 polarités d'un aimant (qui correspondent à un manque ou un excès d'électrons), la reproduction sexuée qui nécessite 2 partenaires ...
- $\pi \simeq 3,1415926...$ apparait dès qu'il y a un cercle, une sphère, une ellipse: cailloux, planètes, gouttes d'eau, oeufs de poissons, corps d'un ver de terre, trajectoires des astres... Il apparait aussi de manière très remarquée dans de nombreuses formules d'analyse et de théorie des nombres.
- $\sqrt{2} \simeq 1,4142...$ apparait dès qu'il y a un carré et sa diagonale. Il est utilisé aussi en imprimerie pour le format des pages A0 (choisi pour que $L \times l = 1$ m^2), A1, A2, ... Notamment $21 \times \sqrt{2} \simeq 21 \times 1,4142 \simeq 29,7$.



On veut que:
$\frac{L}{l} = \frac{l}{\frac{L}{2}} \iff \frac{L^2}{2} = l^2 \iff L = \pm l \times \sqrt{2}$



Quelques formules contenant le nombre d'or:

- $\phi = lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec u_n la suite de Fibonacci définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, soit 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21...
- $\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{...}}}$
- $\phi = \sqrt{1+\phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$
- $\phi - 1 = \sqrt{2-\phi}$
- $\phi = 2 \times cos(\frac{\pi}{5})$